

Matematik, KTH  
B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 3A, fredag 9 oktober 2015  
i SF1630(/SF1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

---

**a1a.** (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation  $\mathcal{R}$  på en mängd  $X$  är reflexiv.

---

**Lösning:**  $\mathcal{R}$  är reflexiv om  $a\mathcal{R}a$  är sann för alla  $a \in X$ .

---

**a1b.** (1p) Sökt är antalet 16-delmängder till en 23-mängd.

---

**Lösning:** Det sökta antalet är binomialtalet  $\binom{23}{16} = \frac{23!}{16! \cdot (23-16)!} = \frac{23!}{7! \cdot 16!}$ .

**Svar:** Det finns  $\frac{23!}{7! \cdot 16!}$  (= 245 157) sådana delmängder.

---

**a1c.** (1p) Sökt är  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ , då vi vet att  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 19$  och att (för alla  $1 \leq i < j \leq 3$ )  $|A_i| = 12$ ,  $|A_i \cap A_j| = 7$ .

---

**Lösning:** Inklusion/exklusion.  $19 = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 12 - 3 \cdot 7 + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ , så  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 19 - 36 + 21 = 4$ .

**Svar:** Precis 4 element tillhör alla tre mängderna.

---

**a1d.** (1p) Sökt är antalet ekvivalensrelationer med 5 ekvivalensklasser på en 11-mängd. Givna är bl.a. stirlingtalen  $S(9, 4) = 7770$ ,  $S(9, 5) = 6951$ ,  $S(10, 4) = 34105$ .

---

**Lösning:** Eftersom ekvivalensrelationer med  $k$  ekvivalensklasser bijektivt motsvarar partitioner i  $k$  delar, är det  $S(11, 5)$  som söks. Rekursionen för stirlingtalen ger  $S(11, 5) = S(10, 4) + 5 \cdot S(10, 5) = S(10, 4) + 5 \cdot (S(9, 4) + 5 \cdot S(9, 5)) = S(10, 4) + 5 \cdot S(9, 4) + 5^2 \cdot S(9, 5)$ .

**Svar:** Det sökta antalet är  $34105 + 5 \cdot 7770 + 5^2 \cdot 6951$  (= 246 730).

---

**a2.** (4p) Sökt är antalet möjliga resultat vid en tentamen med 34 deltagare och 6 möjliga betyg, då dessutom de 10 först inlämnade noteras (med ordning).

---

**Lösning:** Betygen kan fördelas på  $6^{34}$  sätt (antalet funktioner  $34\text{-mängd} \rightarrow 6\text{-mängd}$ , alt. multiplikationsprincipen). Antalet möjliga listor med de 10 första är  $(34)_{10} = \frac{34!}{(34-10)!}$  (antalet injektioner  $10\text{-mängd} \rightarrow 34\text{-mängd}$ , alt. multiplikationsprincipen).

Multiplikationsprincipen ger det sökta antalet som produkten  $6^{34} \cdot \frac{34!}{24!}$ .

**Svar:** Antalet möjliga resultat är  $6^{34} \cdot \frac{34!}{24!}$   
(= 136 333 142 970 790 624 364 359 909 428 714 012 672 000).

---

b-versionen:

---

**b1a.** (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation  $\mathcal{R}$  på en mängd  $X$  är transitiv.

---

**Lösning:**  $\mathcal{R}$  är transitiv om  $((a\mathcal{R}b \text{ och } b\mathcal{R}c) \text{ medför } a\mathcal{R}c \text{ för alla } a, b, c \in X)$ .

---

**b1b.** (1p) Sökt är antalet 10-delmängder till en 34-mängd.

---

**Lösning:** Det sökta antalet är binomialtalet  $\binom{34}{10} = \frac{34!}{10!(34-10)!} = \frac{34!}{10! \cdot 24!}$ .

**Svar:** Det finns  $\frac{34!}{10! \cdot 24!}$  (= 131 128 140) sådana delmängder.

---

**b1c.** (1p) Sökt är  $|B_1 \cap B_2 \cap B_3|$ , då vi vet att  $|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = 21$  och att (för alla  $1 \leq i < j \leq 3$ )  $|B_i| = 14$ ,  $|A_i \cap A_j| = 8$ .

---

**Lösning:** Inklusion/exklusion.  $21 = |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = (|B_1| + |B_2| + |B_3|) - (|B_1 \cap B_2| + |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_3|) + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| = 3 \cdot 14 - 3 \cdot 8 + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$ , så  $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = 21 - 42 + 24 = 3$ .

**Svar:** Precis 3 element tillhör alla tre mängderna.

---

**b1d.** (1p) Sökt är antalet ekvivalensrelationer med 7 ekvivalensklasser på en 12-mängd. Givna är bl.a. stirlingtalen  $S(10, 6) = 22\,827$ ,  $S(10, 7) = 5\,880$ ,  $S(11, 6) = 179\,487$ .

---

**Lösning:** Eftersom ekvivalensrelationer med  $k$  ekvivalensklasser bijektivt motsvarar partitioner i  $k$  delar, är det  $S(12, 7)$  som söks. Rekursionen för stirlingtalen ger  $S(12, 7) = S(11, 6) + 7 \cdot S(11, 7) = S(11, 6) + 7 \cdot (S(10, 6) + 7 \cdot S(10, 7)) = S(11, 6) + 7 \cdot S(10, 6) + 7^2 \cdot S(10, 7)$ .

**Svar:** Det sökta antalet är  $179\,487 + 7 \cdot 22\,827 + 7^2 \cdot 5\,880$  (= 627 396).

---

**b2.** (4p) Sökt är antalet möjliga fördelningar på maträtter och sittplatser då 23 personer väljer bland 4 rätter och 16 av dem bordsplaceras.

---

**Lösning:** Rätterna kan väljas på  $4^{23}$  sätt (antalet funktioner  $23\text{-mängd} \rightarrow 4\text{-mängd}$ , alt. multiplikationsprincipen). Antalet möjliga bordsplaceringar av 16 av dem är  $(23)_{16} = \frac{23!}{(23-16)!}$  (antalet injektioner  $16\text{-mängd} \rightarrow 23\text{-mängd}$ , alt. multiplikationsprincipen). Multiplikationsprincipen ger det sökta antalet som produkten  $4^{23} \cdot \frac{23!}{7!}$ .

**Svar:** Antalet möjliga fördelningar är  $4^{23} \cdot \frac{23!}{7!}$   
(= 360 947 212 772 873 902 484 801 716 224 000).

---