

Svarsförslag för lappskrivning 2B, torsdag 26 november 2015
i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi ska avgöra om följande är **ringar** och om de är **kroppar**:
 $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ och $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$.

Lösning: $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$ är en ring, ingen kropp (15 inte primtal), $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ är både en ring och en kropp och $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$ är en ring, men ingen kropp (16 inte primtal).

a1b. (1p) Gruppen G verkar på mängden X och $x \in X$. Vi ska definiera x :s **bana** för G :s verkan.

Lösning: x :s bana består av de $y \in X$ som har $y = g(x)$ för något $g \in G$,
 $Gx = \{g(x) \mid g \in G\} (\subseteq X)$.

a1c. (1p) Gruppen G verkar på mängden X och $x, y \in X$. Vi söker minsta möjliga $|G|$, då $|Gx| = 10$ och $|Gy| = 35$.

Lösning: $|G| = |Gx| \cdot |G_x| = |Gy| \cdot |G_y|$, så $10, 35 \mid |G|$ och därmed $70 \mid |G|$ (mgm(10,35) = 70). Exemplet $G = \langle (1\ 2 \dots 10)(11\ 12)(13\ 14 \dots 19) \rangle \subseteq S_{19}$,
 $x = 1$ och $y = 11$ visar att $|G| = 70$ är möjligt.

Svar: Minsta möjliga $|G|$ är **70**.

a1d. (1p) Vi ska ange kraven för att en ring $(R, +, \cdot)$ ska vara en kropp.

Lösning: Kravet är att $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ ska vara en abelsk grupp.

a2. $(G, \cdot) = (U(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$ verkar på mängden $X = \mathbb{Z}_{12}$ med multiplikation. Vi ska (a, 1p) finna alla element i G och (b, 3p) ange banor och stabilisatorer för G :s verkan på elementen 2 och 7 i X .

Lösning: a. Enligt känd sats är

$$G = \{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid \text{sgd}(x, 12) = 1\} = \{1, 5, 7, 11\}.$$

$$\text{b. Banan } G2 = \{g \cdot 2 \mid g \in G\} = \{1 \cdot 2, 5 \cdot 2, 7 \cdot 2, 11 \cdot 2\} = \{2, 10, 2, 10\} = \{2, 10\}.$$

$$\text{Banan } G7 = \{g \cdot 7 \mid g \in G\} = G, \text{ ty } 7 \in G \text{ (} 7^{-1} = 7, \text{ så } (g \cdot 7) \cdot 7 = g \text{ för varje } g \in G).$$

$$\text{Stabilisatorn } G_2 = \{g \in G \mid g \cdot 2 = 2\} = \{1, 7\} \text{ enligt ovan.}$$

$$G_7 = \{1\}, \text{ ty } g \cdot 7 = 7, g \in G \Leftrightarrow g = 1 \text{ (} G \text{ en grupp och } 7 \in G).$$

Svar a: $G = \{1, 5, 7, 11\}$, **b: banor:** $G2 = \{2, 10\}$, $G7 = G$,
stabilisatorer: $G_2 = \{1, 7\}$, $G_7 = \{1\}$.

b-versionen:

b1a. (1p) Vi ska avgöra om följande är **ringar** och om de är **kroppar**:
 $(\mathbb{Z}_{27}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ och $(\mathbb{Z}_{28}, +, \cdot)$.

Lösning: $(\mathbb{Z}_{27}, +, \cdot)$ är en ring, ingen kropp (27 inte primtal), $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ är både en ring och en kropp och $(\mathbb{Z}_{28}, +, \cdot)$ är en ring, men ingen kropp (28 inte primtal).

b1b. (1p) Gruppen G verkar på mängden X och $x \in X$. Vi ska definiera x 's **stabilisator** för G 's verkan.

Lösning: x 's stabilisator består av de $g \in G$ som lämnar x invariant,
 $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$, en delgrupp till G .

b1c. (1p) Gruppen G verkar på mängden X och $x, y \in X$. Vi söker minsta möjliga $|G|$, då $|Gx| = 15$ och $|Gy| = 21$.

Lösning: $|G| = |Gx| \cdot |G_x| = |Gy| \cdot |G_y|$, så $15, 21 \mid |G|$ och därmed $105 \mid |G|$ (mgm(15, 21) = 105). Ex. $G = \langle (1\ 2 \dots 15)(16\ 17 \dots 20)(21\ 22 \dots 27) \rangle \subseteq S_{27}$,
 $x = 1$ och $y = 16$ visar att $|G| = 105$ är möjligt.

Svar: Minsta möjliga $|G|$ är **105**.

b1d. (1p) Vi ska ange kraven för att en ring $(R, +, \cdot)$ ska vara en kropp.

Lösning: Kravet är att $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ ska vara en abelsk grupp.

b2. $(G, \cdot) = (U(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$ verkar på mängden $X = \mathbb{Z}_{12}$ med multiplikation. Vi ska (a, 1p) finna alla element i G och (b, 3p) ange banor och stabilisatorer för G 's verkan på elementen 2 och 7 i X .

Lösning: a. Enligt känd sats är

$$G = \{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid \text{sgd}(x, 12) = 1\} = \{1, 5, 7, 11\}.$$

$$\text{b. Banan } G2 = \{g \cdot 2 \mid g \in G\} = \{1 \cdot 2, 5 \cdot 2, 7 \cdot 2, 11 \cdot 2\} = \{2, 10, 2, 10\} = \{2, 10\}.$$

$$\text{Banan } G7 = \{g \cdot 7 \mid g \in G\} = G, \text{ ty } 7 \in G \text{ (} 7^{-1} = 7, \text{ så } (g \cdot 7) \cdot 7 = g \text{ för varje } g \in G).$$

$$\text{Stabilisatorn } G_2 = \{g \in G \mid g \cdot 2 = 2\} = \{1, 7\} \text{ enligt ovan.}$$

$$G_7 = \{1\}, \text{ ty } g \cdot 7 = 7, g \in G \Leftrightarrow g = 1 \text{ (} G \text{ en grupp och } 7 \in G).$$

Svar a: $G = \{1, 5, 7, 11\}$, **b: banor:** $G2 = \{2, 10\}$, $G7 = G$,
stabilisatorer: $G_2 = \{1, 7\}$, $G_7 = \{1\}$.
