

Matematik, KTH
B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 2A, fredag 2 oktober 2015
i SF1630(/SF1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi skall avgöra om $a \mid bc$, $a \nmid b \Rightarrow a \mid c$ för alla $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$.

Lösning: Nej, $a = 4$, $b = c = 2$ ger ett motexempel. (Det är sant om villkoret $a \nmid b$ ersätts med $\text{sgd}(a, b) = 1$.)

Svar: Nej, det är inte sant för alla $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$.

a1b. (1p) Sökta är alla element i U_{20} , de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{20}$.

Lösning: $x \in \mathbb{Z}_{20}$ är inverterbart om $\text{sgd}(x, 20) = 1$, dvs om $2 \nmid x$ och $5 \nmid x$. Så

Svar: U_{20} :s element är 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

a1c. (1p) Vi vet att $x = 317$ uppfyller $x \equiv_{19} 13$, $x \equiv_{20} 17$, $x \equiv_{21} 2$ och söker det minsta heltal $x > 10\,000$ som uppfyller dem.

Lösning: Eftersom 19, 20 och 21 är parvis relativt prima ger kinesiska restsatsen att alla lösningar är $x = 317 + k \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 = 317 + k \cdot 7\,980$ för $k \in \mathbb{Z}$. Det minsta $x > 10\,000$ fås då $k = 2$ och är $317 + 2 \cdot 7\,980 = 16\,277$.

Svar: Det sökta talet är 16 277.

a1d. (1p) Sökt är definitionen av att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en surjektion.

Lösning: f är en surjektion om det för varje $y \in Y$ finns (minst) ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$.

a2. (4p) Sökt är det minsta positiva $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller $x \equiv_{23} 111^{244}$.

Lösning: 23 är ett primtal och $23 \nmid 111$, så $111^{22} \equiv_{23} 1$ (enligt Fermats lilla sats). Det ger $111^{244} = (111^{22})^{11} \cdot 111^2 \equiv_{23} 1^{11} \cdot 111^2 \equiv_{23} (-4)^2 = 16$. $0 \leq 16 < 23$, så det finns inget mindre positivt heltal som är $\equiv_{23} 111^{244}$.

Svar: Det sökta $x = 16$.

b-versionen:

b1a. (1p) Vi skall avgöra om $x \mid yz$, $x \nmid y \Rightarrow x \mid z$ för alla $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$.

Lösning: Nej, $x = 4$, $y = z = 2$ ger ett motexempel. (Det är sant om villkoret $x \nmid y$ ersätts med $\text{sgd}(x, y) = 1$.)

Svar: Nej, det är inte sant för alla $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$.

b1b. (1p) Sökta är alla element i U_{36} , de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{36}$.

Lösning: $x \in \mathbb{Z}_{36}$ är inverterbart omm $\text{sgd}(x, 36) = 1$, dvs omm $2 \nmid x$ och $3 \nmid x$. Så

Svar: U_{36} :s element är 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.

b1c. (1p) Vi vet att $x = 562$ uppfyller $x \equiv_{19} 11$, $x \equiv_{20} 2$, $x \equiv_{21} 16$ och söker det minsta heltal $x > 10\,000$ som uppfyller dem.

Lösning: Eftersom 19, 20 och 21 är parvis relativt prima ger kinesiska restsatsen att alla lösningar är $x = 562 + k \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 = 562 + k \cdot 7\,980$ för $k \in \mathbb{Z}$. Det minsta $x > 10\,000$ fås då $k = 2$ och är $562 + 2 \cdot 7\,980 = 16\,522$.

Svar: Det sökta talet är 16 522.

b1d. (1p) Sökt är definitionen av att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en injektion.

Lösning: f är en injektion omm det för varje $y \in Y$ finns högst ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$. (Alt. omm $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ för alla $x_1, x_2 \in X$.)

b2. (4p) Sökt är det minsta positiva $x \in \mathbb{Z}$ som uppfyller $x \equiv_{19} 111^{236}$.

Lösning: 19 är ett primtal och $19 \nmid 111$, så $111^{18} \equiv_{19} 1$ (enligt Fermats lilla sats). Det ger $111^{236} = (111^{18})^{13} \cdot 111^2 \equiv_{19} 1^{13} \cdot 111^2 \equiv_{19} (-3)^2 = 9$. $0 \leq 9 < 19$, så det finns inget mindre positivt heltal som är $\equiv_{19} 111^{236}$.

Svar: Det sökta $x = 9$.
