

Svarsförslag för lappskrivning 1B, måndag 23 november 2015
i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med att en grupp är **abelsk**.

Lösning: Gruppen $(G, *)$ är abelsk om $g * h = h * g$ för alla $g, h \in G$.

a1b. (1p) Vi skall definiera en **isomorfi** mellan två grupper $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$.

Lösning: En sådan isomorfi är en bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ som bevarar gruppstrukturen, dvs för alla $g, g' \in G_1$ gäller $\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g')$.

(Det följer att β tar identitetslement till identitetslement och invers till invers, $\beta(1_1) = 1_2$ och $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$.)

a1c. (1p) Vi skall visa att $|gH| = |H|$ då H är en ändlig (behövs egentligen inte) delgrupp till gruppen G och $g \in G$.

Lösning: Enligt definitionen av kardinalitet räcker det att visa att funktionen $f_g : H \rightarrow gH$, given av $f_g(h) = gh$, är en bijektion.

f_g är en surjektion enligt definition (gH är mängden av alla $f_g(h)$ för $h \in H$) och en injektion eftersom $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ för alla $h_1, h_2 \in H$ (multiplicera med g^{-1} från vänster). f_g är alltså en surjektion och en injektion, så en bijektion.

a1d. (1p) Vi skall avgöra hur många delgrupper av ordning 3 en cyklisk grupp G av ordning 63 kan ha.

Lösning: Eftersom $3 \mid 63$ ($63 = 3 \cdot 21$) har G precis en delgrupp av ordning 3 (känd egenskap för cykliska grupper, se Biggs 20.9).

a2. $(G, *)$ är en ändlig grupp och $g \in G$, $g \neq 1$ uppfyller $g^{-1} = g^{14}$. Vi skall (a, 2p) avgöra vilka av $|G| = 12, 16, 20, 30, 48$ som är möjliga och (b, 2p) ge exempel på sådana G, g för ett av de värdena på $|G|$.

Lösning: $g^{-1} = g^{14} \Leftrightarrow g^{15} = 1 \Leftrightarrow o(g) \mid 15$, så $o(g) = 3, 5$ eller 15 (inte 1, ty $g \neq 1$).

a. $o(g) \mid |G|$, så $|G|$ kan inte vara 16, men 12, 20, 30 och 48 är möjliga (exempel som i b.).

b. Den cykliska gruppen $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ och elementet $g = 4$ är ett exempel för det första värdet på $|G|$.

Svar a: 12, 20, 30 och 48 möjliga, 16 inte möjligt, b: ex. enligt ovan.

b-versionen:

b1a. (1p) Vi skall definiera en **isomorfi** mellan två grupper $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$.

Lösning: En sådan isomorfi är en bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ som bevarar gruppstrukturen, dvs för alla $g, g' \in G_1$ gäller $\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g')$.

(Det följer att β tar identitetselement till identitetselement och invers till invers, $\beta(1_1) = 1_2$ och $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$.)

b1b. (1p) Vi skall ange vad som menas med att en grupp är **abelsk**.

Lösning: Gruppen $(G, *)$ är abelsk om $g * h = h * g$ för alla $g, h \in G$.

b1c. (1p) Vi skall visa att $|Hg| = |H|$ då H är en ändlig (behövs egentligen inte) delgrupp till gruppen G och $g \in G$.

Lösning: Enligt definitionen av kardinalitet räcker det att visa att funktionen $f_g : H \rightarrow Hg$, given av $f_g(h) = hg$, är en bijektion.

f_g är en surjektion enligt definition (Hg är mängden av alla $f_g(h)$ för $h \in H$) och en injektion eftersom $h_1g = h_2g \Rightarrow h_1 = h_2$ för alla $h_1, h_2 \in H$ (multiplicera med g^{-1} från höger). f_g är alltså en surjektion och en injektion, så en bijektion.

b1d. (1p) Vi skall avgöra hur många delgrupper av ordning 3 en cyklisk grupp G av ordning 45 kan ha.

Lösning: Eftersom $3 \mid 45$ ($45 = 3 \cdot 15$) har G precis en delgrupp av ordning 3 (känd egenskap för cykliska grupper, se Biggs 20.9).

b2. $(G, *)$ är en ändlig grupp och $g \in G$, $g \neq 1$ uppfyller $g^{-1} = g^{20}$. Vi skall (a, 2p) avgöra vilka av $|G| = 12, 20, 21, 27, 49$ som är möjliga och (b, 2p) ge exempel på sådana G, g för ett av de värdena på $|G|$.

Lösning: $g^{-1} = g^{20} \Leftrightarrow g^{21} = 1 \Leftrightarrow o(g) \mid 21$, så $o(g) = 3, 7$ eller 21 (inte 1, ty $g \neq 1$).

a. $o(g) \mid |G|$, så $|G|$ kan inte vara 20, men 12, 21, 27 och 49 är möjliga (exempel som i b.).

b. Den cykliska gruppen $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ och elementet $g = 4$ är ett exempel för det första värdet på $|G|$.

Svar a: 12, 21, 27 och 49 möjliga, 20 inte möjligt, b: ex. enligt ovan.
