

Svarsförslag för lappskrivning 1A, onsdag 23 september 2015
i SF1630(/5B1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Sökt är definitionen av det kromatiska talet, $\chi(G)$, för en graf G .

Lösning: $\chi(G)$ är det minsta antalet färger i en hörnfärgning av G , dvs en färgläggning av hörnen så att de två hörnen i varje kant har olika färger.

a1b. (1p) Sökt är definitionen av en hamiltoncykel i en graf.

Lösning: En hamiltoncykel är en cykel som innehåller varje hörn i grafen precis en gång. (En cykel är en vandring som börjar och slutar i samma hörn och i övrigt inte upprepar något hörn.)

a1c. (1p) En graf med precis fyra komponenter, e st kanter och v st hörn är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär. Sökt är antalet områden sfärens yta delas in i.

Lösning: Eftersom grafen är plan (utan kantkorsningar på en sfäryta) och har fyra komponenter, uppfyller v , e och r (antalet områden) generaliseringen av Eulers polyederformel $v - e + r - 4 = 1$, så $r = e - v + 5$. (Alternativt, med den vanliga Eulers polyederformel, man kan lägga till tre kanter mellan komponenterna och få en (plan och) sammanhängande graf med tre kanter mer än den givna grafen, så $v - (e + 3) + r = 2$ etc.)

Svar: Antalet områden är $e - v + 5$.

a1d. (1p) Sökt är Halls villkor för existensen av en fullständig matchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$.

Lösning: Villkoret (nödvändigt och tillräckligt) är att för varje $A \subseteq X$ gäller att $|A| \leq |J(A)|$, där $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$.

a2. (4p) Vi söker valenssumman $\sum_{x \in V} \delta(x)$ för en graf $G = (V, E)$ med $|V| = 2416$ och precis en cykel i varje komponent.

Lösning: I varje graf är $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2|E|$, så det gäller att finna $|E|$, antalet kanter i G .

I varje komponent kan man ta bort en kant (i komponentens cykel) och få ett träd, vilket har ett hörn mer än antalet kanter. Varje komponent (och därmed hela grafen) har alltså lika många kanter som hörn. Hela grafen har då 2416 st kanter. Det ger $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2|E| = 2 \cdot 2416 = 4832$.

Svar: Summan av alla grafens valenser är 4832.

b-versionen:

b1a. (1p) Sökt är definitionen av att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är isomorfa.

Lösning: De är isomorfa om det finns en bijektion (dvs en funktion som är 1-1 och på) $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.

b1b. (1p) Sökt är definitionen av en eulerkrets i en graf.

Lösning: En eulerkrets är en sluten väg som passerar varje kant i grafen precis en gång.

b1c. (1p) En graf med precis tre komponenter, e st kanter och v st hörn är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär. Sökt är antalet områden sfärens yta delas in i.

Lösning: Eftersom grafen är plan (utan kantkorsningar på en sfäryta) och har tre komponenter, uppfyller v , e och r (antalet områden) generaliseringen av Eulers polyederformel $v - e + r - 3 = 1$, så $r = e - v + 4$. (Alternativt, med den vanliga Eulers polyederformel, man kan lägga till två kanter mellan komponenterna och få en (plan och) sammanhängande graf med två kanter mer än den givna grafen, så $v - (e + 2) + r = 2$ etc.)

Svar: Antalet områden är $e - v + 4$.

b1d. (1p) Sökt är Halls villkor för existensen av en fullständig matchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$.

Lösning: Villkoret (nödvändigt och tillräckligt) är att för varje $A \subseteq X$ gäller att $|A| \leq |J(A)|$, där $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$.

b2. (4p) Vi söker antalet hörn, $|V|$, i en graf $G = (V, E)$ med precis en cykel i varje komponent och valenssumman $\sum_{x \in V} \delta(x) = 6\,544$.

Lösning: I varje graf är $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2|E|$, så vi får att antalet kanter i G , $|E| = \frac{1}{2} \cdot 6\,544 = 3\,272$.

I varje komponent kan man ta bort en kant (i komponentens cykel) och få ett träd, vilket har ett hörn mer än antalet kanter. Varje komponent (och därmed hela grafen) har alltså lika många kanter som hörn, så $|V| = |E| = 3\,272$.

Svar: Antalet hörn i grafen är 3 272.
