

Matematik, KTH
B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 3A, fredag 10 oktober 2014
i SF1630(/5B1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är reflexiv.

Lösning: $\mathcal{R}$ är reflexiv omm $a\mathcal{R}a$ är sann för alla $a \in X$.

a1b. (1p) Sökt är antalet injektioner $f: X \rightarrow Y$, då $|X| = r \leq s = |Y|$.

Lösning: Det sökta antalet är $s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-r+1) = \frac{s!}{(s-r)!}$.
(Fås direkt med multiplikationsprincipen).

a1c. (1p) Sökt är antalet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N}^5$ med
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 246.$$

Lösning: Oordnat urval med upprepning, antalet är $\binom{246+5-1}{5-1} = \binom{250}{4} = \frac{250!}{4! \cdot 246!}$
(= 158 882 750) (4 positioner av 250 väljs ut för plustecknen).

a1d. (1p) Sökta är rekursionssamband för $S(n, k)$, stirlingtalen (av andra slaget).

Lösning:
$$\begin{cases} S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k), & \text{för } 1 < k < n, \\ S(n, 1) = S(n, n) = 1, & \text{för } 1 \leq n. \end{cases}$$

a2. (4p) Sökt är antalet möjliga resultat då bland 64 personer en guld- en silver- och en bronsmedalj delas ut (till olika personer) och bland övriga 12 personer utses för (identiska) hedersomnämmanden.

Lösning: Medaljerna kan delas ut på $(64)_3 = 64 \cdot 63 \cdot 62 = \frac{64!}{61!}$ sätt (injektion från en 3-mängd till en 64-mängd).

Bland övriga 61 personer kan 12 få hedersomnämmanden på $\binom{61}{12} = \frac{61!}{12! \cdot 49!}$ sätt. Multiplikationsprincipen ger det sökta antalet som $\frac{64!}{61!} \cdot \frac{61!}{12! \cdot 49!} = \frac{64!}{12! \cdot 49!}$.

Svar: Antalet är $\frac{64!}{12! \cdot 49!}$ (= 435 486 869 625 225 600).

b-versionen:

b1a. (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är transitiv.

Lösning: $\mathcal{R}$ är transitiv omm $((a\mathcal{R}b \text{ och } b\mathcal{R}c) \text{ medför } a\mathcal{R}c \text{ för alla } a, b, c \in X)$.

b1b. (1p) Sökt är antalet funktioner $f : X \rightarrow Y$ då $|X| = x$, $|Y| = y$.

Lösning: Det sökta antalet funktioner är $\underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{x \text{ st}} = y^x$.
(Fås direkt med multiplikationsprincipen).

b1c. (1p) Sökt är antalet sätt att fördela u identiska enkronor bland v särskiljbara barn.

Lösning: Oordnat urval med upprepning, antalet är $\binom{u+v-1}{v-1} = \frac{(u+v-1)!}{(v-1)! \cdot u!}$.
($v-1$ positioner av $u+v-1$ väljs ut för väggar mellan förmögenheterna).

b1d. (1p) A , B och C är ändliga mängder. Vi skall ange ett uttryck för $|A \cup B \cup C|$ som bara innehåller antalen element i A , B , C och skärningar mellan dem.

Lösning: Principen om inklusion och exklusion (sällprincipen):
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$.

b2. (4p) Sökt är antalet möjliga sätt man kan utse en tävlande i vardera grafteori, talteori, kombinatorik och algebra (fyra olika) och 17 personer till hejaklacken bland 87 personer.

Lösning: Grenarna kan delas ut på $(87)_4 = 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 = \frac{87!}{83!}$ sätt (injektion från en 4-mängd till en 87-mängd).

Bland övriga 83 personer kan 17 väljas till klacken på $\binom{83}{17} = \frac{83!}{17! \cdot 66!}$ sätt.
Multiplikationsprincipen ger det sökta antalet som $\frac{87!}{83!} \cdot \frac{83!}{17! \cdot 66!} = \frac{87!}{17! \cdot 66!}$.

Svar: Antalet är $\frac{87!}{17! \cdot 66!} (= 10\,886\,239\,811\,418\,134\,245\,853\,400)$.
