

Matematik, KTH

B.Ek

**Svarsförslag för lappskrivning 2B, fredag 28 november 2014
i SF1630(/1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)**

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Den ändliga gruppen G :s verkan på mängden X har två banor med 5 och 21 element. Vi skall uttala oss om $|G|$, G :s ordning.

Lösning: $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$, så banans storlek $|Gx|$ är en delare till $|G|$, så $\text{mgm}(5, 21) = 105$ är en delare till $|G|$. **Svar:** $|G|$ är delbar med 105.

a1b. (1p) Vi söker villkor på $(R, \cdot)$, för att $(R, +, \cdot)$ skall kunna vara en ring.

Lösning: Enligt definitionen av en ring (med etta) krävs att operationen $\cdot$ skall vara (sluten, dvs $a \cdot b \in R$ för alla $a, b \in R$), associativ och ha ett identitetsselement, 1. Dessutom skall $+$ uppfylla de distributiva lagarna $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ och $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ för alla $a, b, c \in R$.

a1c. (1p) Vi skall avgöra om det finns någon ring som inte är en kropp.

Lösning: Ja, t.ex. $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ är en ring, men inte en kropp, ty $2 \in \mathbb{Z}_4$, $2 \neq 0$, men 2 saknar multiplikativ invers i $\mathbb{Z}_4$. I en kropp har alla element utom 0 en sådan invers.

a1d. (1p) Vi skall avgöra om det finns någon kropp som inte är en ring.

Lösning: Nej, en kropp kan definieras som en ring med den ytterligare egenskapen att $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ är en abelsk grupp, så varje kropp är en ring.

a2 (4p) En liksidig triangel ges en färgad kula i varje hörn. Vi söker antalet väsentligt olika sådana trianglar med k olika färger för kulorna.

Lösning: Vi använder "Burnsides lemma" (Th. 21.4 i boken).

Gruppen som verkar på färgningarna är $G_\Delta \approx S_3$ med element:

- identitetsavbildningen id . Alla färgningar är invarianta, $|F(id)| = k^3$
- 2 rotationer $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring axeln vinkelrätt mot triangeln (genom dess mittpunkt). Invarianta är färgningar med samma färg på alla kulorna, $|F(g)| = k$
- 3 rotationer π kring triangelns höjder. Invarianta är färgningar med de två kulorna som inte ligger på rotationsaxeln likfärgade, $|F(g)| = k^2$

Enligt Burnside är antalet väsentligt olika färgningar = antalet banor = $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{6}(k^3 + 2k + 3k^2)$.

Svar: Antalet väsentligt olika färgningar är $\frac{1}{6}(k^3 + 3k^2 + 2k)$.

b-versionen:

b1a. (1p) Den ändliga gruppen G :s verkan på mängden X har två banor med 7 och 12 element. Vi skall uttala oss om $|G|$, G :s ordning.

Lösning: $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$, så banans storlek $|Gx|$ är en delare till $|G|$, så $\text{mgm}(7, 12) = 84$ är en delare till $|G|$. **Svar: $|G|$ är delbar med 84.**

b1b. (1p) Vi söker villkor på $(R, +)$, för att $(R, +, \cdot)$ skall kunna vara en ring.

Lösning: Enligt definitionen av en ring (med etta) krävs att $(R, +)$ skall vara en abelsk grupp och att $+\cdot$ uppfyller de distributiva lagarna $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ och $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ för alla $a, b, c \in R$.

b1c. (1p) Vi skall avgöra om det finns någon kropp som inte är en ring.

Lösning: Nej, en kropp kan definieras som en ring med den ytterligare egenskapen att $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ är en abelsk grupp, så varje kropp är en ring.

b1d. (1p) Vi skall avgöra om det finns någon ring som inte är en kropp.

Lösning: Ja, t.ex. $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ är en ring, men inte en kropp, ty $2 \in \mathbb{Z}_4$, $2 \neq 0$, men 2 saknar multiplikativ invers i $\mathbb{Z}_4$. I en kropp har alla element utom 0 en sådan invers.

b2. (4p) En liksidig triangel ges en färgad kula i varje hörn. Vi söker antalet väsentligt olika sådana trianglar med k olika färger för kulorna.

Lösning: Vi använder "Burnsides lemma" (Th. 21.4 i boken).

Gruppen som verkar på färgningarna är $G_\Delta \approx S_3$ med element:

- identitetsavbildningen id . Alla färgningar är invarianta, $|F(id)| = k^3$
- 2 rotationer $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring axeln vinkelrätt mot triangeln (genom dess mittpunkt). Invarianta är färgningar med samma färg på alla kulorna, $|F(g)| = k$
- 3 rotationer π kring triangelns höjder. Invarianta är färgningar med de två kulorna som inte ligger på rotationsaxeln likfärgade, $|F(g)| = k^2$

Enligt Burnside är antalet väsentligt olika färgningar = antalet banor = $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{6}(k^3 + 2k + 3k^2)$.

Svar: Antalet väsentligt olika färgningar är $\frac{1}{6}(k^3 + 3k^2 + 2k)$.
