

Matematik, KTH

B.Ek

**Svarsförslag för lappskrivning 2A, fredag 3 oktober 2014
i SF1630(/5B1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)**

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Sökt är sista siffran då talet 22 514 skrivs i bas 7.

Lösning: Den sista siffran är den principala resten då talet divideras med 7.
 $22\,514 = 3\,000 \cdot 7 + 1\,514 \equiv_7 1\,514 = 200 \cdot 7 + 114 \equiv_7 114 \equiv_7 44 \equiv_7 2$, så

Svar: Den sista siffran är 2.

a1b. (1p) Sökt är definitionen av att $x \equiv y \pmod{m}$ (då $x, y, m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$).

Lösning: $x \equiv y \pmod{m}$ omm $m \mid (x - y)$, dvs $x - y = k \cdot m$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

a1c. (1p) Sökt är definitionen av $\phi(m)$ då $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ (ϕ är Eulers ϕ -funktion).

Lösning: $\phi(m) = |\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq m, \text{sgd}(x, m) = 1\}|$.

Alternativt: $\phi(m) = |U_m|$, där U_m är mängden av inverterbara element i $\mathbb{Z}_m$.

a1d. (1p) Sökt är definitionen av att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en surjektion.

Lösning: f är en surjektion omm det för varje $y \in Y$ finns (minst) ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$.

a2. (4p) Vi skall beräkna $145^{-1} \cdot 3 + 88$ i $\mathbb{Z}_{147}$.

Lösning: Eftersom (Euklides) $147 = 1 \cdot 145 + 2$, $145 = 72 \cdot 2 + 1$, och därur
 $1 = 145 - 72 \cdot 2 = 145 - 72(147 - 145) = -72 \cdot 147 + 73 \cdot 145$ är $145^{-1} = 73$ i $\mathbb{Z}_{147}$.

Det ger $145^{-1} \cdot 3 = 73 \cdot 3 = 146 + 73 = 72$ i $\mathbb{Z}_{147}$.

Således $145^{-1} \cdot 3 + 88 = 72 + 88 = 72 + 75 + 13 = 13$ i $\mathbb{Z}_{147}$.

Svar: $145^{-1} \cdot 3 + 88 = 13$ i $\mathbb{Z}_{147}$.

b-versionen:

b1a. (1p) Sökt är sista siffran då talet 26 115 skrivs i bas 8.

Lösning: Den sista siffran är den principala resten då talet divideras med 8.
 $26\,115 = 3\,000 \cdot 8 + 2\,115 \equiv_8 2\,115 = 200 \cdot 8 + 515 \equiv_8 515 \equiv_8 35 \equiv_8 3$, så

Svar: Den sista siffran är 3.

b1b. (1p) Sökt är definitionen av att $x \equiv y \pmod{m}$ (då $x, y, m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$).

Lösning: $x \equiv y \pmod{m}$ omm $m \mid (x - y)$, dvs $x - y = k \cdot m$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

b1c. (1p) Sökt är definitionen av att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en injektion.

Lösning: f är en injektion omm det för varje $y \in Y$ finns högst ett $x \in X$ sådant att $y = f(x)$. (Alternativt: Om för alla $x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.)

b1d. (1p) Sökt är definitionen av att en oändlig mängd är uppräknelig.

Lösning: X är uppräknelig (t oändlig) omm det finns en bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

b2. (4p) Vi skall beräkna $151^{-1} \cdot 3 + 96$ i $\mathbb{Z}_{153}$.

Lösning: Eftersom (Euklides) $153 = 1 \cdot 151 + 2$, $151 = 75 \cdot 2 + 1$, och därur
 $1 = 151 - 75 \cdot 2 = 151 - 75(153 - 151) = -75 \cdot 153 + 76 \cdot 151$ är $151^{-1} = 76$ i $\mathbb{Z}_{153}$.

Det ger $151^{-1} \cdot 3 = 76 \cdot 3 = 152 + 76 = 75$ i $\mathbb{Z}_{153}$.

Således $151^{-1} \cdot 3 + 96 = 75 + 96 = 75 + 78 + 18 = 18$ i $\mathbb{Z}_{153}$.

Svar: $151^{-1} \cdot 3 + 96 = 18$ i $\mathbb{Z}_{153}$.
