

Matematik, KTH

B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 1B, fredag 21 november 2014 i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi skall avgöra om $(S_7, \circ)$, $(\mathbb{Z}_7, +)$ och $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ är grupper.

Lösning: $(S_7, \circ)$ och $(\mathbb{Z}_7, +)$ är grupper, men det är inte $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ (0 saknar invers).

a1b. (1p) Vi skall definiera en **isomorfi** mellan två grupper $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$.

Lösning: En sådan isomorfi är en bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ som bevarar gruppstrukturen, dvs för alla $g, g' \in G_1$ gäller $\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g')$.

(Det följer att β tar identitets-element till identitets-element och invers till invers, $\beta(1_1) = 1_2$ och $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$.)

a1c. (1p) Vi skall ange det minsta möjliga värdet för $|G|$, då gruppen G har två delgrupper H och K med $|H| = 12$ och $|K| = 32$.

Lösning: Eftersom $|H|$ och $|K|$ delar $|G|$ (om G är ändlig) (Lagranges sats), måste $|G|$ vara minst $\text{mgm}(12, 32) = 96$ och den cykliska gruppen C_{96} har delgrupper isomorfa med C_{12} och C_{32} , så 96 är det minsta möjliga värdet.

a1d. (1p) Vi skall definiera en **vänstersidoklass** för en delgrupp H till en grupp G .

Lösning: En vänstersidoklass är en mängd av form $gH = \{gh \mid h \in H\}$ för något $g \in G$.

a2. $(G, *)$, där $G = \{1, a, b, c, d\}$, är en grupp med 5 element. Vi skall (a, 1p) finna a 's **ordning**, $o(a)$, (b, 1p) då $a * b = c$ finna möjliga k bland $0, 1, \dots, 6$ med $b = a^k$ och (c, 2p) då $a * b = c$ finna $d * d$.

Lösning: a. $o(a)$ delar $|G| = 5$ (ett primtal) och $a \neq 1$ (så $o(a) \neq 1$), så $o(a) = 5$.
b. $b \neq 1 = a^0 = a^5$ och $b \neq a = a^1 = a^6$ är givna. $c \neq 1$ ger $b \neq a^{-1} = a^4$.
 $b = a^2$ och $b = a^3$ går bra (de ger $c = a^3$ resp. $c = a^4$ och $1, a, b, c$ blir alla olika).
c. $b = a^2$ ger $c = a^3$, så $d = a^4$ ($1, a, a^2 = b, a^3 = c, a^4$ alla olika då $o(a) = 5$) och $d * d = a^8 = a^3 = c$.

Om $b = a^3$ är $c = a^4$, så $d = a^2$ och $d * d = a^4 = c$.

Svar a: $o(a) = 5$, **b:** $k = 2, 3$ möjliga, **c:** $d * d = c$.

b-versionen:

b1a. (1p) Vi skall avgöra om $(\mathbb{Z}_{11}, +)$, $(\mathbb{Z}_{11}, \cdot)$ och $(S_{11}, \circ)$ är grupper.

Lösning: $(\mathbb{Z}_{11}, +)$ och $(S_{11}, \circ)$ är grupper, men det är inte $(\mathbb{Z}_{11}, \cdot)$ (0 saknar invers).

b1b. (1p) Vi skall definiera $\mathcal{Z}(G)$, **centrum** för en grupp G .

Lösning: $\mathcal{Z}(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ för alla } g \in G\}$.

a1c. (1p) Vi skall ange det minsta möjliga värdet för $|G|$, då gruppen G har två delgrupper H och K med $|H| = 18$ och $|K| = 27$.

Lösning: Eftersom $|H|$ och $|K|$ delar $|G|$ (om G är ändlig) (Lagranges sats), måste $|G|$ vara minst $\text{mgm}(18, 27) = 54$ och den cykliska gruppen C_{54} har delgrupper isomorfa med C_{18} och C_{27} , så 54 är det minsta möjliga värdet.

b1d. (1p) Vi skall definiera en **högersidoklass** för en delgrupp H till en grupp G .

Lösning: En högersidoklass är en mängd av form $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ för något $g \in G$.

b2. $(G, *)$, där $G = \{1, s, t, u, v\}$, är en grupp med 5 element. Vi skall (a, 1p) finna u :s **ordning**, $o(u)$, (b, 1p) då $u * v = s$ finna möjliga k bland $0, 1, \dots, 6$ med $v = u^k$ och (c, 2p) då $u * v = s$ finna $t * t$.

Lösning: a. $o(u)$ delar $|G| = 5$ (ett primtal) och $u \neq 1$ (så $o(u) \neq 1$), så $o(u) = 5$.

b. $v \neq 1 = u^0 = u^5$ och $v \neq u = u^1 = u^6$ är givna. $s \neq 1$ ger $v \neq u^{-1} = u^4$.

$v = u^2$ och $v = u^3$ går bra (de ger $s = u^3$ resp. $s = u^4$ och $1, s, u, v$ blir alla olika).

c. $v = u^2$ ger $s = u^3$, så $t = u^4$ ($1, u, u^2 = v, u^3 = s, u^4$ alla olika då $o(u) = 5$) och $t * t = u^8 = u^3 = s$.

Om $v = u^3$ är $s = u^4$, så $t = u^2$ och $t * t = u^4 = s$.

Svar a: $o(u) = 5$, **b:** $k = 2, 3$ möjliga, **c:** $t * t = s$.
