

Matematik, KTH

B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 1A, torsdag 25 september 2014  
i SF1630(/5B1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

---

**a1a.** (1p) Sökt är definitionen av att graferna  $G_1 = (V_1, E_1)$  och  $G_2 = (V_2, E_2)$  är isomorfa.

---

**Lösning:** De är isomorfa om det finns en bijektion (dvs en funktion som är 1-1 och på)  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , sådan att  $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$ .

---

**a1b.** (1p) Sökt är definitionen av att  $x, y \in V$ , där  $G = (V, E)$  är en graf, ligger i samma komponent i  $G$ .

---

**Lösning:** De ligger i samma komponent precis om det finns en stig i  $G$  från  $x$  till  $y$ .

---

**a1c.** (1p) En sammanhängande graf med  $v$  st hörn är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär och delar in sfärytan i  $r$  st områden. Sökt är antalet kanter i grafen.

---

**Lösning:** Eftersom grafen är plan (utan kantkorsningar på en sfäryta) och sammanhängande, uppfyller  $v$ ,  $r$  och  $e$ , antalet kanter, Eulers polyederformel  $v - e + r = 2$ , så  $e = v + r - 2$ . **Svar: Antalet kanter är  $v + r - 2$ .**

---

**a1d.** (1p) Vi skall definiera en transversal för en mängdfamilj  $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ .

---

**Lösning:** En transversal är en familj  $\{s_i \mid i \in I\}$  med  $s_i \in S_i$  för alla  $i \in I$  och  $s_i \neq s_j$  då  $i \neq j$ .

---

**a2.** (4p) En planets åtta länder gränsar till varandra enligt tabellen:

Frågan är om en planetbo kan göra en resa där han startar från sitt hem i D, passerar varje gränsstation precis en gång och slutar hemma i D.

---

| Land | gränsar till |   |   |   |   |
|------|--------------|---|---|---|---|
| A    | B            | C | E | G | H |
| B    | A            | C | F | H |   |
| C    | A            | B | E | F |   |
| D    | E            | F | G | H |   |
| E    | A            | C | D | G |   |
| F    | B            | C | D | H |   |
| G    | A            | D | E | H |   |
| H    | A            | B | D | F | G |

**Lösning:** A har ett udda antal gräns(station)er, så resenären som startar utanför A kommer efter att ha passerat var och en av dem precis en gång att befinna sig i A, utan möjlighet att lämna landet.

Annorlunda uttryckt: en graf saknar eulerkrets om inte alla valenser är jämna.

**Svar: Nej, en sådan resa går inte att göra.**

---

b-versionen:

---

**b1a.** (1p) Sökt är definitionen av att en graf  $G = (V, E)$  är reguljär.

**Lösning:** En graf är reguljär precis om alla hörn har samma valens, dvs lika många grannar.

---

**b1b.** (1p) Sökt är definitionen av det kromatiska talet,  $\chi(G)$ , för en graf  $G$ .

**Lösning:**  $\chi(G)$  är det minsta antalet färger i en hörnfärgning av  $G$ , dvs en färgläggning av hörnen så att de två hörnen i varje kant har olika färger.

---

**b1c.** (1p) En sammanhängande graf med  $e$  st kanter är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär och delar in sfärytan i  $r$  st områden. Sökt är antalet hörn i grafen.

**Lösning:** Eftersom grafen är plan (utan kantkorsningar på en sfäryta) och sammanhängande, uppfyller  $e$ ,  $r$  och  $v$ , antalet hörn, Eulers polyederformel  $v - e + r = 2$ , så  $v = e - r + 2$ . **Svar: Antalet hörn är  $e - r + 2$ .**

---

**b1d.** (1p) Sökt är Halls villkor för existensen av en fullständig matchning i en bipartit graf  $G = (X \cup Y, E)$ .

**Lösning:** Villkoret (nödvändigt och tillräckligt) är att för varje  $A \subseteq V$  gäller att  $|A| \leq |J(A)|$ , där  $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$ .

---

**b2.** (4p) En planets åtta länder gränsar till varandra enligt tabellen:

Frågan är om en planetbo kan göra en resa där han startar från sitt hem i 5, passerar varje gränsstation precis en gång och slutar hemma i 5.

| Land | gränsar till |   |   |   |   |
|------|--------------|---|---|---|---|
| 1    | 2            | 3 | 6 | 7 |   |
| 2    | 1            | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 3    | 1            | 2 | 5 | 6 |   |
| 4    | 5            | 6 | 7 | 8 |   |
| 5    | 2            | 3 | 4 | 8 |   |
| 6    | 1            | 3 | 4 | 7 |   |
| 7    | 1            | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 8    | 2            | 4 | 5 | 7 |   |

**Lösning:** 2 har ett udda antal gräns(station)er, så resenären som startar utanför 2 kommer efter att ha passerat var och en av dem precis en gång att befinna sig i 2, utan möjlighet att lämna landet.

Annorlunda uttryckt: en graf saknar eulerkrets om inte alla valenser är jämna.

**Svar: Nej, en sådan resa går inte att göra.**

---