Matematik, KTH
B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 3B, fredag 6 december 2013
i SF1630(/1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

---

a1a. (1p) Karakteristiken för en ändlig kropp F är det minsta $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ som uppfyller $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p \text{ st}} = 0$ i F.

---

a1b. (1p) Faktorsatsen säger att om $f(x) \in F[x]$, där F är en kropp, gäller för alla $\alpha \in F$ att

$$(x-\alpha) \mid f(x) \quad \text{omm} \quad f(\alpha) = 0.$$

---

a1c. (1p) Om $(F, +, \cdot)$ är en ändlig kropp är den multiplikativa gruppen $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ cyklisk.

---

a1d. (1p) Ett irreducibelt polynom $k(x) \in F[x]$ är primitivt precis om x genererar den multiplikativa gruppen i $F[x]/(k(x))$.

---

a2. (4p) Vi söker den moniska största gemensamma delaren till

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 4 \quad \text{och} \quad g(x) = x^3 + 3x^2 + 3$$

i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Lösning: Vi bestämmer sgd med Euklides algoritm.
Polynomdivision ger $f(x) = (x+4)g(x) + (4x^2+3x+2) = (x+4)g(x) + r_1(x)$.
och $g(x) = (4x+4)r_1(x) + 0$, så $r_1(x)$ är en största gemensam delare.
Den moniska sgd:n får vi genom att multiplicera med $4^{-1} = 4$.
Den blir $\text{sgd}(f(x), g(x)) = 4(4x^2 + 3x + 2) = x^2 + 2x + 3$.
Svar: Den moniska sgd$(f(x), g(x)) = x^2 + 2x + 3$.

---

b-versionen:

---

b1a. (1p) De möjliga värdena för $|F|$ då F är en ändlig kropp är p^r, där p är ett primtal och r är ett positivt heltal.

---

b1b. (1p) Då $(F, +, \cdot)$ är en ändlig kropp av karakteristik p är den additiva gruppen $(F, +)$ (isomorf med) en direkt produkt av cykliska grupper C_p (r stycken, med r från uppgift a.).

---

b1c. (1p) Varje (icke-konstant) polynom i $F[x]$ är en produkt av irreducibla polynom. Två olika sådana faktoriseringar innehåller lika många faktorer och faktorerna kan ordnas så att de som står i motsvarande positioner är lika, bortsett från en konstant faktor.

---

b1d. (1p) Om F är en kropp och $k(x)$ ett polynom i $F[x]$ är ringen $F[x]/(k(x))$ en kropp precis om $k(x)$ är irreducibelt.

---

b2. (4p) Vi söker den moniska största gemensamma delaren till

$$f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4 \quad \text{och} \quad g(x) = x^3 + x + 3$$

i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Lösning: Vi bestämmer sgd med Euklides algoritm.
Polynomdivision ger $f(x) = (x+1)g(x) + (3x^2 + 3x + 1) = (x+1)g(x) + r_1(x)$.
och $g(x) = (2x + 3)r_1(x) + 0$, så $r_1(x)$ är en största gemensam delare.
Den moniska sgd:n får vi genom att multiplicera med $3^{-1} = 2$.
Den blir $\operatorname{sgd}(f(x), g(x)) = 2(3x^2 + 3x + 1) = x^2 + x + 2$.
Svar: Den moniska sgd$(f(x), g(x)) = x^2 + x + 2$.
