

Matematik, KTH

B.Ek

**Svarsförslag för lappskrivning 3A, torsdag 10 oktober 2013
i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)**

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi skall ange antalet injektioner $f : A \rightarrow B$, då A är en k -mängd och B en n -mängd.

Lösning: Injektion innebär ordnat urval utan upprepning, så antalet är $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

a1b. (1p) $\mathcal{R}$ är en binär relation på mängden X . Vi skall ange de villkor som definierar att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Lösning: Villkoren är:

$$\begin{array}{lll} x\mathcal{R}x & \text{för alla } x \in X & \text{(reflexivitet),} \\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x & \text{för alla } x, y \in X & \text{(symmetri),} \\ (x\mathcal{R}y \text{ och } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z & \text{för alla } x, y, z \in X & \text{(transitivitet).} \end{array}$$

a1c. (1p) I Pelles korg läggs n paket kakor, valda bland m sorter. Vi skall ange antalet möjliga olika innehåll i korgen.

Lösning: Oordnat val av n st bland m st (val av sort för varje paket), med upprepning, så antalet är $\binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$ ($m-1$ "väggar" delar in de n paketen).

a1d. (1p) Vi skall ange rekursionssambanden som ger antalet olika delmängder med r element till en mängd med n element.

Lösning: Det handlar om binomialtalen $\binom{n}{r}$ (för $r, n \in \mathbb{N}$). De bestäms av

$$\begin{cases} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} & \text{då } 0 < r < n, \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \text{då } 0 \leq n. \end{cases}$$

a2. (4p) Vi söker antalet sätt att ordna korten i en kortlek med alla spaderkorten samlade och alla hjärterkorten samlade.

Lösning: Man kan ordna korten så: först ordnas spaderkorten på $13!$ möjliga sätt (antalet injektioner kort $\rightarrow$ platser), sedan alla hjärterkorten på $13!$ sätt och slutligen övriga 26 kort och de två buntarna med spader- och hjärterkort på $(26+1+1)!$ sätt. Multiplikationsprincipen ger svaret:

Svar: Antalet sådana ordningar är $13! \cdot 13! \cdot 28!$

(= 11 822 285 827 637 842 352 106 743 443 424 343 490 560 000 000 000).

b-versionen:

b1a. (1p) $\mathcal{Q}$ är en binär relation på mängden A . Vi skall ange de villkor som definierar att $\mathcal{Q}$ är en ekvivalensrelation.

Lösning: Villkoren är:

$$\begin{array}{lll} a\mathcal{R}a & \text{för alla } a \in A & \text{(reflexivitet),} \\ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a & \text{för alla } a, b \in A & \text{(symmetri),} \\ (a\mathcal{R}b \text{ och } b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c & \text{för alla } a, b, c \in A & \text{(transitivitet).} \end{array}$$

b1b. X , Y och Z är ändliga mängder. Vi skall ange ett uttryck för $|X \cup Y \cup Z|$ som bara innehåller antalen element i X , Y , Z och skärningar mellan dem.

Lösning: Principen om inklusion och exklusion (sällprincipen):

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - (|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|) + |X \cap Y \cap Z|.$$

b1c. (1p) Vi skall ange antalet olika funktioner $f : M \rightarrow \{1, 2, 3\}$, som antar värdet 1 r gånger, värdet 2 s gånger och värdet 3 t gånger. ($|M| = r + s + t$.)

Lösning: Antalet ges av multinomialtalet $\binom{r+s+t}{r, s, t} = \frac{(r+s+t)!}{r! \cdot s! \cdot t!}$.

b1d. (1p) I Lisas påse finns q kulor, var och en med en av p färger. Vi skall ange antalet möjliga innehåll i påsen.

Lösning: Oordnat val av q st bland p st (val av färg för varje kula), med upprepning, så antalet är $\binom{p+q-1}{p-1} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)! \cdot q!}$ ($p-1$ "väggar" delar in de q kulorna).

b2. (4p) Vi söker antalet sätt att ordna korten i en kortlek med alla klöverkorten samlade, alla ruterkort samlade och alla hjärterkort samlade.

Lösning: Man kan ordna korten så: först ordnas klöverkorten på $13!$ möjliga sätt (antalet injektioner kort $\rightarrow$ platser), sedan alla ruterkort på $13!$ sätt, sedan alla hjärterkort på $13!$ sätt och slutligen övriga 13 kort och de tre buntarna med klöver-, ruter- och hjärterkort på $(13 + 1 + 1 + 1)!$ sätt. Multiplikationsprincipen ger svaret:

Svar: Antalet sådana ordningar är $13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 16!$

(= 5 051 967 441 039 872 636 453 342 838 521 856 000 000 000).
