Matematik, KTH
B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 2B, fredag 29 november 2013
i SF1630(/1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

---

a1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med x:s **bana** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X.

Lösning: x:s bana, Gx, är mängden av de element i X som x avbildas på av något $g \in G$. Alltså $Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$.

---

a1b. (1p) Vi skall ange vad som menas med x:s **stabilisator** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X.

Lösning: x:s stabilisator, G_x, är mängden (delgruppen till G) av de $g \in G$ som avbildar x på x. Alltså $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

---

a1c. (1p) Vi skall ange ett uttryck för antalet väsentligt olika (under en ändlig grupp G av rotationssymmetrier) färgningar av en polyeders sidoytor med ett givet antal färger.

Lösning: Det sökta antalet ges (”Burnsides lemma”) av $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|$, där $F(g)$ är mängden färgningar som är oförändrade då g roterar den så färgade polyedern.

---

a1d. (1p) Vi skall ange villkoren för att en ring $(R, +, \cdot)$ skall vara en kropp.

Lösning: Multiplikationen $\cdot$ skall vara kommutativ (dvs $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$) och varje $a \in R \setminus \{0\}$ skall ha en multiplikativ invers.
Alternativt uttryckt: $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ skall vara en abelsk grupp.

---

a2. Vi skall visa hur följande följer från att $(R, +, \cdot)$ är en ring och de egenskaper som definierar en ring: (a, 1p) $-0 = 0$, (b, 1p) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ för alla $a \in R$, (c, 1p) $a \cdot (-a) = (-a) \cdot a = -a^2$ för alla $a \in R$ och (d, 1p) om $a \in R$ uppfyller $a^2 = 0$, är $a + 1$ inverterbart i R.

Lösning: a. $(R, +)$ är en grupp, så identitetselementet 0 är sin egen invers, ty $0 + 0 = 0$.
b. $0 + 0 = 0$, så distributivitet ger $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$. ”Strykning” ger $a \cdot 0 = 0$ (och p.s.s. $0 \cdot a + 0 \cdot a = (0 + 0)a = 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0$, så $0 \cdot a = 0$).
c. $a + (-a) = 0$, så $a^2 + a\cdot(-a) = a(a + (-a)) = a\cdot 0 = 0 = 0\cdot a = (a + (-a))a = a^2 + (-a)\cdot a$. Det ger att $a \cdot (-a) = (-a) \cdot a = -a^2$.
d. Då $a^2 = 0$ fås $(a+1)((-a)+1) = (a+1)(-a)+(a+1)1 = a\cdot(-a)+1\cdot(-a)+a+1 = -a^2+(-a)+a+1 = -0+0+1 = 1$. P.s.s. visas $((-a)+1)(a+1) = 1$, så $(a + 1)^{-1} = (-a) + 1$.

---

b-versionen:

---

b1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med x:s **stabilisator** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X.

Lösning: x:s stabilisator, G_x, är mängden (delgruppen till G) av de $g \in G$ som avbildar x på x. Alltså $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

---

b1b. (1p) Vi skall ange vad som menas med x:s **bana** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X.

Lösning: x:s bana, Gx, är mängden av de element i X som x avbildas på av något $g \in G$. Alltså $Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$.

---

b1c. (1p) Vi skall ange ett uttryck för antalet väsentligt olika (under en ändlig grupp G av rotationssymmetrier) färgningar av en polyeders sidoytor med ett givet antal färger.

Lösning: Det sökta antalet ges (”Burnsides lemma”) av $\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |F(g)|$, där $F(g)$ är mängden färgningar som är oförändrade då g roterar den så färgade polyedern.

---

b1d. (1p) Vi skall ange villkoren för att en ring $(R, +, \cdot)$ skall vara en kropp.

Lösning: Multiplikationen $\cdot$ skall vara kommutativ (dvs $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$) och varje $a \in R \setminus \{0\}$ skall ha en multiplikativ invers.
Alternativt uttryckt: $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ skall vara en abelsk grupp.

---

b2. Vi skall visa hur följande följer från att $(R, +, \cdot)$ är en ring och de egenskaper som definierar en ring: (a, 1p) $-0 = 0$, (b, 1p) $b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0$ för alla $b \in R$, (c, 1p) $b \cdot (-b) = (-b) \cdot b = -b^2$ för alla $b \in R$ och (d, 1p) om $b \in R$ uppfyller $b^2 = 0$, är $b + 1$ inverterbart i R.

Lösning: a. $(R, +)$ är en grupp, så identitetselementet 0 är sin egen invers, ty $0 + 0 = 0$.
b. $0 + 0 = 0$, så distributivitet ger $b \cdot 0 + b \cdot 0 = b(0 + 0) = b \cdot 0 = b \cdot 0 + 0$. ”Strykning” ger $b \cdot 0 = 0$ (och p.s.s. $0 \cdot b + 0 \cdot b = (0 + 0)b = 0 \cdot b = 0 \cdot b + 0$, så $0 \cdot b = 0$).
c. $b + (-b) = 0$, så $b^2 + b \cdot (-b) = b(b + (-b)) = b \cdot 0 = 0 = 0 \cdot b = (b + (-b))b = b^2 + (-b) \cdot b$. Det ger att $b \cdot (-b) = (-b) \cdot b = -b^2$.
d. Då $b^2 = 0$ fås $(b+1)((-b)+1) = (b+1)(-b) + (b+1)1 = b \cdot (-b) + 1 \cdot (-b) + b + 1 = -b^2 + (-b) + b + 1 = -0 + 0 + 1 = 1$. P.s.s. visas $((-b)+1)(b+1) = 1$, så $(b + 1)^{-1} = (-b) + 1$.
