

Matematik, KTH

B.Ek

**Svarsförslag för lappskrivning 1B, fredag 22 november 2013
i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)**

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med att en grupp G är **cyklisk**.

Lösning: Att G är cyklisk är detsamma som att det finns ett $x \in G$ som genererar G , dvs att för varje $g \in G$ finns (minst) ett $n \in \mathbb{Z}$ sådant att $g = x^n$ (där x^n för $n < 0$ tolkas som $(x^{-1})^{-n}$).

a1b. (1p) Vi skall definiera en **isomorfi** mellan två grupper $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$.

Lösning: En sådan isomorfi är en bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ som bevarar gruppstrukturen, dvs för alla $g, g' \in G_1$ gäller $\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g')$.
(Det följer att β tar identitetselement till identitetselement och invers till invers, $\beta(1_1) = 1_2$ och $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$.)

a1c. (1p) Vi skall ange alla möjliga värden för $o(g)$, ordningen för ett element g i en grupp då det uppfyller $g^{45} = 1$.

Lösning: Om $g^n = 1$ måste enligt en känd sats n vara en multipel av $o(g)$, så svaret ges av alla positiva delare till 45 (de är alla möjliga, ty varje positivt heltal är ordningen för något gruppelament). Möjliga värden är alltså 1, 3, 5, 9, 15 och 45.

a1d. (1p) Vi skall definiera en **vänstersidoklass** för en delgrupp H till en grupp G .

Lösning: En vänstersidoklass är en mängd av form $gH = \{gh \mid h \in H\}$ för något $g \in G$.

a2. (4p) Vi skall visa att för varje mängd X är $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ en grupp, där $\triangle$ betecknar symmetrisk differens, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Lösning: Vi verifierar gruppaxiomen,

G1 (slutenhet): $A, B \subseteq X \Rightarrow A \triangle B \subseteq X$ (ty $A \setminus B, B \setminus A \subseteq X$).

G2 (associativitet): $(A \triangle B) \triangle C =$ mängden av element som ligger i precis en av $A \triangle B$ och C , dvs i precis en av A och B och inte i C , eller inte i någon av A och B men i C , eller i både A och B och i C , dvs de i precis en av A, B och C , eller i alla tre.

På samma sätt ser man att $A \triangle (B \triangle C)$ innehåller samma element.

G3 (identitet): $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$ för alla A , så $\emptyset$ är ett identitetselement.

G4 (invers): $A \triangle A = \emptyset$, så $A = A^{-1}$, för alla A .

$(\mathcal{P}(X), \triangle)$ uppfyller gruppaxiomen och är alltså en grupp, **saken är klar**.

b-versionen:

b1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med att en grupp G är **abelsk**.

Lösning: $(G, *)$ är abelsk (= kommutativ) om $x * y = y * x$ för alla $x, y \in G$.

b1b. (1p) Vi skall definiera **ordningen** för ett element g i en grupp.

Lösning: g :s ordning, $o(g)$, är det minsta heltalet $n \geq 1$ sådant att $g^n = 1$, G :s identitets-element, om ett sådant n finns. Annars är g :s ordning oändlig.

b1c. (1p) Vi skall ange alla möjliga värden för $|H|$, då H är en delgrupp till gruppen G med $|G| = 28$.

Lösning: Enligt Lagranges sats är $|H|$ en delare till $|G|$, så de möjliga värdena är alla positiva delare till 28, dvs 1, 2, 4, 7, 14, 28 (alla dessa är ju också ordningar för delgrupper till den cykliska gruppen med 28 element).

b1d. (1p) Vi skall definiera en **högersidoklass** för en delgrupp H till en grupp G .

Lösning: En högersidoklass är en mängd av form $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ för något $g \in G$.

b2. (4p) Vi skall visa att för varje mängd X är $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ en grupp, där $\triangle$ betecknar symmetrisk differens, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Lösning: Vi verifierar gruppaxiomen,

G1 (slutenhet): $A, B \subseteq X \Rightarrow A \triangle B \subseteq X$ (ty $A \setminus B, B \setminus A \subseteq X$).

G2 (associativitet): $(A \triangle B) \triangle C =$ mängden av element som ligger i precis en av $A \triangle B$ och C , dvs i precis en av A och B och inte i C , eller inte i någon av A och B men i C , eller i både A och B och i C , dvs de i precis en av A, B och C , eller i alla tre.

På samma sätt ser man att $A \triangle (B \triangle C)$ innehåller samma element.

G3 (identitet): $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$ för alla A , så $\emptyset$ är ett identitets-element.

G4 (invers): $A \triangle A = \emptyset$, så $A = A^{-1}$, för alla A .

$(\mathcal{P}(X), \triangle)$ uppfyller gruppaxiomen och är alltså en grupp, **saken är klar**.
