

Matematik, KTH
B.Ek

Svarsförslag för lappskrivning 1A, fredag 20 september 2013
i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Sökt är ett samband mellan $|V|$ och $|E|$ då $G = (V, E)$ är ett träd.

Lösning: Ett träd har $|E| = |V| - 1$ (utom det tomma trädet, som har $|V| = |E| = 0$).

a1b. (1p) Sökt är definitionen av en hamiltoncykel i en graf.

Lösning: En hamiltoncykel är en cykel som innehåller varje hörn i grafen precis en gång. (En cykel är en vandring som börjar och slutar i samma hörn och i övrigt inte upprepar något hörn.)

a1c. (1p) Sökt är skillnaden mellan begreppen planär graf och plan graf.

Lösning: En plan graf är en graf som en figur i ett plan, sådan att inga kanter korsar varandra (eller passerar ett hörn). En planär graf är en graf som är isomorf med en plan graf, dvs som kan ritas utan korsande kanter i ett plan.

a1d. (1p) Sökt är definitionen av maximal matchning i en graf $G = (V, E)$.

Lösning: En matchning är en delmängd M till E , sådan att alla par av olika kanter i M är disjunkta, dvs de saknar gemensamma hörn. En maximal matchning är en matchning med maximalt antal kanter.

a2. (4p) En plan sammanhängande graf på ytan av en sfär har valenserna 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5. Sökt är antalet områden grafen delar in sfärens yta i.

Lösning: Eftersom grafen är plan (på en sfär) uppfyller antalen hörn $v (= 9)$, kanter e och områden r Eulers formel $v - e + r = 2$.

Summan av valenserna i en graf är alltid $2e$, så $e = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5) = 14$. Man får $r = -v + e + 2 = -9 + 14 + 2 = 7$.

Svar: Antalet områden är 7.

b-versionen:

b1a. (1p) Sökt är definitionen av ett träd (i grafteorin).

Lösning: En graf är ett träd om och endast om den är sammanhängande och saknar cykler.

Alternativt, om och endast om det mellan varje två hörn går exakt en stig.

b1b. (1p) Sökt är definitionen av en eulerkrets i en graf.

Lösning: En eulerkrets är en sluten väg som passerar varje kant i grafen precis en gång.

b1c. (1p) Sökt är skillnaden mellan begreppen planär graf och plan graf.

Lösning: En plan graf är en graf som en figur i ett plan, sådan att inga kanter korsar varandra (eller passerar ett hörn). En planär graf är en graf som är isomorf med en plan graf, dvs som kan ritas utan korsande kanter i ett plan.

b1d. (1p) Sökt är det minimala antalet färger som krävs för en kantfärgning av en bipartit graf med valenser 1, 1, 2, 2, 2, 2 på ena sidan och 2, 2, 3, 3 på den andra.

Lösning: I en bipartit graf är det minimala antalet färger i en kantfärgning lika med den maximala valensen i grafen. I vårt fall alltså **3**.

b2. (4p) En plan sammanhängande graf på ytan av en sfär har valenserna 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5. Sökt är antalet områden grafen delar in sfärens yta i.

Lösning: Eftersom grafen är plan (på en sfär) uppfyller antalen hörn $v(=8)$, kanter e och områden r Eulers formel $v - e + r = 2$.

Summan av valenserna i en graf är alltid $2e$, så $e = \frac{1}{2}(2+3+3+3+4+4+4+5) = 14$. Man får $r = -v + e + 2 = -8 + 14 + 2 = 8$.

Svar: Antalet områden är 8.
