

Matematik, KTH

B.Ek

Lösningsförslag ls3A, Diskret matematik, 8 oktober 2012

a1) (4p) 23 kvinnor och 28 män anmäler sig till en danstävling.

Kvinnorna väljer ut var sin man att dansa med och efter att de framfört sina danser bestämmer en jury vilka 10 par av de 23 som går till final.

Efter att de 10 finalistparen dansat igen röstar de 107 åskådarna. Var och en av dem lägger en röst, på ett av paren i finalen.

Hur många olika resultat är möjliga?

Med ett resultat menas här en lista över vem som dansade med vem (även paren som inte gick till final), vilka par som gick till final och hur många röster vart och ett av finalistparen fick av publiken.

(Svaret får innehålla heltal, de fyra enkla räknesätten, fakulteter och potenser.)

Lösning:

Männen kan väljas på $(28)_{23} = \frac{28!}{5!}$ sätt (injektioner 23-mängd $\rightarrow$ 28-mängd).

Finalistparen kan utses på $\binom{23}{10} = \frac{23!}{10! \cdot 13!}$ sätt (10-delmängder till 23-mängd).

Publikrösterna kan fördelas på $\binom{107+10-1}{10-1} = \frac{116!}{9! \cdot 107!}$ sätt (oordnat val med upprepning).

Multiplikationsprincipen ger det totala antalet möjligheter som produkten av dem, dvs $\frac{28!}{5!} \cdot \frac{23!}{10! \cdot 13!} \cdot \frac{116!}{9! \cdot 107!} = \frac{28! \cdot 23! \cdot 116!}{5! \cdot 10! \cdot 13! \cdot 9! \cdot 107!}$ (upprepade val, fixa antal möjligheter i varje).

Svar: $\frac{28! \cdot 23! \cdot 116!}{5! \cdot 10! \cdot 13! \cdot 9! \cdot 107!}$ ($= 22160047502270678231922087214811754528768000000$)

olika resultat är möjliga.

a2) Didrik har totalt 62 böcker i sin bokhylla.

Av dem är 20 på svenska och 24 är inbundna. 15 böcker är på svenska och handlar om matematik, 11 är på svenska och är inbundna, 20 av böckerna om matematik är inbundna och 8 av de senare är på svenska. 13 böcker är varken inbundna, på svenska eller om matematik.

a) (2p) Hur många böcker om matematik har Didrik i sin bokhylla?

b) (2p) Hur många av böckerna i a) är varken på svenska eller inbundna?

Lösning:

Inklusion och exklusion (sällprincipen). Låt X vara mängden av böckerna i hyllan, M de om matematik, S de på svenska och I de inbundna.

Givet är då att $|X| = 62$, $|S| = 20$, $|I| = 24$, $|M \cap S| = 15$, $|S \cap I| = 11$,

$|M \cap I| = 20$, $|M \cap S \cap I| = 8$ och $|X \setminus (M \cup S \cup I)| = 13$.

Sällprincipen ger $13 = |X \setminus (M \cup S \cup I)| = |X| - (|M| + |S| + |I|) + (|M \cap S| + |S \cap I| + |M \cap I|) - |M \cap S \cap I| = 62 - (|M| + 44) + 46 - 8 = 56 - |M|$, så $|M| = 43$.

I b) söks $|M \setminus (S \cup I)| = |M \setminus ((M \cap S) \cup (M \cap I))| = |M| - (|M \cap S| + |M \cap I|) + |M \cap S \cap I| = 43 - (15 + 20) + 8 = 16$.

Svar a: Endast 43 av Didriks böcker handlar om matematik,

b: 16 av dessa är varken på svenska eller inbundna.

b1) (4p) 27 kvinnor och 24 män anmäler sig till en danstävling.

Männen väljer ut var sin kvinna att dansa med och efter att de framfört sina danser bestämmer en jury vilka 10 par av de 24 som går till final.

Efter att de 10 finalistparen dansat igen röstar de 99 åskådarna. Var och en av dem lägger en röst, på ett av paren i finalen.

Hur många olika resultat är möjliga?

Med ett resultat menas här en lista över vem som dansade med vem (även paren som inte gick till final), vilka par som gick till final och hur många röster vart och ett av finalistparen fick av publiken.

(Svaret får innehålla heltal, de fyra enkla räknesätten, fakulteter och potenser.)

Lösning:

Kvinnorna kan väljas på $(27)_{24} = \frac{27!}{3!}$ sätt (injektioner 24-mängd $\rightarrow$ 27-mängd).

Finalistparen kan utses på $\binom{24}{10} = \frac{24!}{10! \cdot 14!}$ sätt (10-delmängder till 24-mängd).

Publikrösterna kan fördelas på $\binom{99+10-1}{10-1} = \frac{108!}{9! \cdot 99!}$ sätt (oordnat val med upprepning).

Multiplikationsprincipen ger det totala antalet möjligheter som produkten av dem, dvs $\frac{27!}{3!} \cdot \frac{24!}{10! \cdot 14!} \cdot \frac{108!}{9! \cdot 99!} = \frac{27! \cdot 24! \cdot 108!}{3! \cdot 10! \cdot 14! \cdot 9! \cdot 99!}$ (upprepade val, fixa antal möjligheter i varje).

Svar: $\frac{27! \cdot 24! \cdot 108!}{3! \cdot 10! \cdot 14! \cdot 9! \cdot 99!} (= 13921870830288833032436145796484117299200000000)$

olika resultat är möjliga.

b2) Disa har totalt 62 böcker i sin bokhylla.

Av dem innehåller 23 romantik och 29 innehåller spänning. 15 böcker innehåller både matematik och romantik, 17 både romantik och spänning. 18 av böckerna innehåller både matematik och spänning, medan 11 av de senare också innehåller romantik. 12 böcker innehåller varken matematik, romantik eller spänning.

a) (2p) Hur många böcker om matematik har Disa i sin bokhylla?

b) (2p) Hur många av böckerna i a) innehåller varken romantik eller spänning?

Lösning:

Inklusion och exklusion (sällprincipen). Låt X vara mängden av böckerna i hyllan, M de om matematik, R de med romantik och S de med spänning.

Givet är då att $|X| = 62$, $|R| = 23$, $|S| = 29$, $|M \cap R| = 15$, $|R \cap S| = 17$,

$|M \cap S| = 18$, $|M \cap R \cap S| = 11$ och $|X \setminus (M \cup R \cup S)| = 12$.

Sällprincipen ger $12 = |X \setminus (M \cup R \cup S)| = |X| - (|M| + |R| + |S|) + (|M \cap R| + |R \cap S| + |M \cap S|) - |M \cap R \cap S| = 62 - (|M| + 52) + 50 - 11 = 49 - |M|$, så $|M| = 37$.

I b) söks $|M \setminus (R \cup S)| = |M \setminus ((M \cap R) \cup (M \cap S))| = |M| - (|M \cap R| + |M \cap S|) + |M \cap R \cap S| = 37 - (15 + 18) + 11 = 15$.

Svar a: Endast 37 av Disas böcker handlar om matematik,

b: 15 av dessa innehåller varken romantik eller spänning.