

Lösningsförslag ls2B, Diskret matematik, 16 november 2012

- a1) Vi skall (a, 1p) finna $(G, \times)$, gruppen av inverterbara element i $\mathbb{Z}_{10}$,
 (b, 2p) alla banor då G verkar på $\mathbb{Z}_{10}$ med multiplikationen $\times$ och
 (c, 1p) ange vad elementen i varje bana har gemensamt i förhållande till 10.

Lösning:

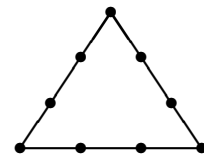
$x \in \mathbb{Z}_m$ är inverterbart om $\text{sgd}(x, m) = 1$, så $G = U(\mathbb{Z}_{10}) = \{1, 3, 7, 9\}$.

$G1 = G3 = G7 = G9 = G$, eftersom G är en grupp (för alla $a, b \in G$ finns $x \in G$ så att $xa = b$). Dessutom blir $G2 = \{1 \times 2, 3 \times 2, 7 \times 2, 9 \times 2\} = \{2, 6, 4, 8\}$ och därmed $G4 = G6 = G8 = \{2, 4, 6, 8\}$. Vidare blir $G5 = \{5\}$ och $G0 = \{0\}$.

Varje bana består tydligen av element i $\mathbb{Z}_{10}$ med samma största gemensam delare med 10.

Svar a: $G = \{1, 3, 7, 9\}$, **b:** Banorna är G , $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{5\}$ och $\{0\}$,
c: Banorna består av $x \in \mathbb{Z}_{10}$ med $\text{sgd}(x, 10) = 1, 2, 5$ resp. 10.

- a2) (4p) Färgade kulor sitter som i figuren längs kanten av en skiva med form av en liksidig triangel. Vi söker antalet väsentligt olika (dvs som inte kan vridas eller vändas till varandra) fördelningar av färger på kulorna, då det finns totalt k färger att tillgå.



Lösning:

Symmetrigruppen för plattan med kulor är (isomorf med) G_Δ , som innehåller identitetsavbildningen i , rotationer $\frac{2\pi}{3}$ och $\frac{4\pi}{3}$ kring mittpunkten och vändningar av plattan kring de tre höjderna.

”Burnsides lemma” (Thm 21.4 i Biggs) ger antalet väsentligt olika färgningar = antalet banor då G_Δ verkar på färgningarna = $\frac{1}{|G_\Delta|} \sum_{g \in G_\Delta} |F(g)|$, där $F(g)$ är mängden av färgningar som inte ändras då g verkar.

Vi finner $|G_\Delta| = 6$, $|F(i)| = k^9$ (alla färgningar bevaras av identiteten, varje kulas färg kan väljas på k sätt), $|F(r)| = k^3$ (vid rotationerna delas kulorna in i 3 banor och alla kulor i samma bana måste ha samma färg) och $|F(x)| = k^5$ (vändningarna delar in kulorna i 5 banor).

Det ger $\frac{1}{|G_\Delta|} \sum_{g \in G_\Delta} |F(g)| = \frac{1}{6}(k^9 + 2 \cdot k^3 + 3 \cdot k^5)$.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{1}{6}(k^9 + 3k^5 + 2k^3)$.

- b1)** Vi skall (a, 1p) finna $(G, \times)$, gruppen av inverterbara element i $\mathbb{Z}_{12}$,
 (b, 2p) alla banor då G verkar på $\mathbb{Z}_{12}$ med multiplikationen $\times$ och
 (c, 1p) ange vad elementen i varje bana har gemensamt i förhållande till 12.

Lösning:

$x \in \mathbb{Z}_m$ är inverterbart om $\text{sgd}(x, m) = 1$, så $G = U(\mathbb{Z}_{12}) = \{1, 5, 7, 11\}$.

$G1 = G5 = G7 = G11 = G$, eftersom G är en grupp (för alla $a, b \in G$ finns $x \in G$ så att $xa = b$). Dessutom blir $G2 = \{1 \times 2, 5 \times 2, 7 \times 2, 11 \times 2\} = \{2, 10, 2, 10\} = \{2, 10\}$ och därmed $G10 = \{2, 10\}$. Vidare blir p.s.s. $G3 = \{3, 9\} = G9$, $G4 = \{4, 8\} = G8$, $G6 = \{6\}$ och $G0 = \{0\}$.

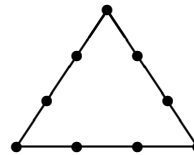
Varje bana består tydligen av element i $\mathbb{Z}_{12}$ med samma största gemensam delare med 12.

Svar a: $G = \{1, 5, 7, 11\}$,

b: Banorna är G , $\{2, 10\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$, $\{6\}$ och $\{0\}$,

c: Banorna består av $x \in \mathbb{Z}_{12}$ med $\text{sgd}(x, 12) = 1, 2, 3, 4, 6$ och 12 .

- b2)** (4p) Färgade kulor sitter som i figuren längs kanten av en skiva med form av en liksidig triangel. Vi söker antalet väsentligt olika (dvs som inte kan vridas eller vändas till varandra) fördelningar av färger på kulorna, då det finns totalt n färger att tillgå.



Lösning:

Symmetrigruppen för plattan med kulor är (isomorf med) G_Δ , som innehåller identitetsavbildningen i , rotationer $\frac{2\pi}{3}$ och $\frac{4\pi}{3}$ kring mittpunkten och vändningar av plattan kring de tre höjderna.

"Burnsides lemma" (Thm 21.4 i Biggs) ger antalet väsentligt olika färgningar = antalet banor då G_Δ verkar på färgningarna = $\frac{1}{|G_\Delta|} \sum_{g \in G_\Delta} |F(g)|$, där $F(g)$ är mängden av färgningar som inte ändras då g verkar.

Vi finner $|G_\Delta| = 6$, $|F(i)| = n^6$ (alla färgningar bevaras av identiteten, varje kulas färg kan väljas på n sätt), $|F(r)| = n^3$ (vid rotationerna delas kulorna in i 3 banor och alla kulor i samma bana måste ha samma färg) och $|F(x)| = n^5$ (vändningarna delar in kulorna i 5 banor).

Det ger $\frac{1}{|G_\Delta|} \sum_{g \in G_\Delta} |F(g)| = \frac{1}{6}(n^6 + 2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^5)$.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{1}{6}(n^6 + 3n^5 + 2n^3)$.