

Lösningsförslag ls2A, Diskret matematik, 2 oktober 2012

a1) (4p) Finn det minsta positiva (dvs > 0) tal som kan skrivas som

$$315m + 462n$$

med $m, n \in \mathbb{Z}$.

Du behöver inte finna motsvarande m, n , men glöm inte att motivera svaret.

Lösning:

Enligt känd sats finns $m, n \in \mathbb{Z}$ så att $315m + 462n = \text{sgd}(315, 462)$ och för alla $m, n \in \mathbb{Z}$ gäller $\text{sgd}(315, 462) \mid 315m + 462n$. Det sökta minsta värdet är alltså $\text{sgd}(315, 462)$. Vi finner den med Euklides algoritim:

$$462 = 1 \cdot 315 + 147, \quad 315 = 2 \cdot 147 + 21, \quad 147 = 7 \cdot 21 + 0, \quad \text{så } \text{sgd}(315, 462) = 21.$$

Svar: Det minsta värdet är 21.

a2) I svaren till a)–c) nedan skall det klart framgå av motiveringarna vad ”injektiv” respektive ”surjektiv” innebär.

Betrakta funktionen $f : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ som ges av

$$f(x) = x^3 + 3x.$$

a) (1p) Är f en injektiv funktion?

b) (1p) Är f en surjektiv funktion?

c) (2p) Givet funktionerna $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ och $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, kan sammansättningen $hg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara injektiv? Kan den vara surjektiv?

Ge i vart och ett av fallen ett exempel där hg har egenskapen, eller förklara varför sådana g och h inte finns.

$\mathbb{R}$ och $\mathbb{Q}$ betecknar som vanligt de reella respektive de rationella talen.

Lösning:

a)–b) Man finner $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0 = 0$, $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 = 4$, $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 = 1 + 6 = 0$. $f(0) = f(2)$, så det finns $x_1 \neq x_2$ med $f(x_1) = f(x_2)$, dvs f är inte injektiv.

Eftersom $\mathbb{Z}_7$ är ändlig är varje funktion som inte är injektiv heller inte surjektiv (dvs det finns $y \in \mathbb{Z}_7$ med $y \neq f(x)$ för alla $x \in \mathbb{Z}_7$), så f är inte surjektiv.

c) Enligt kända resultat är $\mathbb{Q}$ uppräknelig och $\mathbb{R}$ överuppräknelig. $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ ger att g inte kan vara injektiv och h inte kan vara surjektiv, så hg kan varken vara injektiv eller surjektiv. ($g(x_1) = g(x_2)$ ger $hg(x_1) = hg(x_2)$, så om hg är injektiv är g också det, och $y = hg(x)$ ger $y = h(g(x))$, så om hg är surjektiv är h också det.)

Svar a,b: f är varken injektiv eller surjektiv,

c: hg kan varken vara injektiv eller surjektiv.

b1) (4p) Finn det minsta positiva (dvs > 0) tal som kan skrivas som

$$342m + 234n$$

med $m, n \in \mathbb{Z}$.

Du behöver inte finna motsvarande m, n , men glöm inte att motivera svaret.

Lösning:

Enligt känd sats finns $m, n \in \mathbb{Z}$ så att $342m + 234n = \text{sgd}(342, 234)$ och för alla $m, n \in \mathbb{Z}$ gäller $\text{sgd}(342, 234) \mid 342m + 234n$. Det sökta minsta värdet är alltså $\text{sgd}(342, 234)$. Vi finner den med Euklides algoritm:

$$342 = 1 \cdot 234 + 108, \quad 234 = 2 \cdot 108 + 18, \quad 108 = 6 \cdot 18 + 0, \quad \text{så } \text{sgd}(342, 234) = 18.$$

Svar: Det minsta värdet är 18.

b2) I svaren till a)–c) nedan skall det klart framgå av motiveringarna vad ”injektiv” respektive ”surjektiv” innebär.

Betrakta funktionen $f : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ som ges av

$$f(x) = x^3 + 5x.$$

a) (1p) Är f en injektiv funktion?

b) (1p) Är f en surjektiv funktion?

c) (2p) Givet funktionerna $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ och $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, kan sammansättningen $hg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara injektiv? Kan den vara surjektiv?

Ge i vart och ett av fallen ett exempel där hg har egenskapen, eller förklara varför sådana g och h inte finns.

$\mathbb{R}$ och $\mathbb{Q}$ betecknar som vanligt de reella respektive de rationella talen.

Lösning:

a)–b) Man finner $f(0) = 0^3 + 5 \cdot 0 = 0$, $f(1) = 1^3 + 5 \cdot 1 = 6$, $f(2) = 2^3 + 5 \cdot 2 = 1 + 3 = 4$, $f(3) = 3^3 + 5 \cdot 3 = 6 + 1 = 0$. $f(0) = f(3)$, så det finns $x_1 \neq x_2$ med $f(x_1) = f(x_2)$, dvs f är inte injektiv.

Eftersom $\mathbb{Z}_7$ är ändlig är varje funktion som inte är injektiv heller inte surjektiv (dvs det finns $y \in \mathbb{Z}_7$ med $y \neq f(x)$ för alla $x \in \mathbb{Z}_7$), så f är inte surjektiv.

c) Enligt kända resultat är $\mathbb{Q}$ uppräknelig och $\mathbb{R}$ överuppräknelig. $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ ger att g inte kan vara injektiv och h inte kan vara surjektiv, så hg kan varken vara injektiv eller surjektiv. ($g(x_1) = g(x_2)$ ger $hg(x_1) = hg(x_2)$, så om hg är injektiv är g också det, och $y = hg(x)$ ger $y = h(g(x))$, så om hg är surjektiv är h också det.)

Svar a,b: f är varken injektiv eller surjektiv,

c: hg kan varken vara injektiv eller surjektiv.
