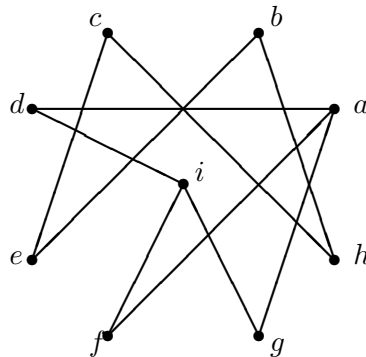


Lösningsförslag ls1A, Diskret matematik, 18 september 2012

a1) Betrakta grafen G i figuren. För poäng räcker det här med (korrekta) svar.



a. (1p) Är G en **sammanhängande** graf?

b. (1p) Är G en **bipartit** graf?

c. (1p) Ange två par av hörn i grafen så att G' , som uppstår om kanter mellan dessa par läggs till G , är en **eulersk** graf (dvs har en eulerkrets).

G' skall vara en enkel graf, dvs sakna öglor och multipla kanter.

d. (1p) Samma fråga som i c., men med tre par av hörn i stället för två.

Lösning:

a. Grafen är **inte** sammanhängande. T.ex. finns ingen stig från a till b .

b. Grafen **är** bipartit, ty med $X = \{a, b, c, i\}$ och $Y = \{d, e, f, g, h\}$ finns inga kanter inom X eller inom Y .

c. En graf är eulersk precis om den är sammanhängande och alla hörn har jämn valens. För att G' skall bli eulersk måste a och i få varsin kant och komponenterna förbindas. En möjlighet är att ta $\{a, b\}$ och $\{b, i\}$.

d. Nu kan man ta t.ex. $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ och $\{c, i\}$.

Svar a: nej, b: ja, c: t.ex. $\{a, b\}$ och $\{b, i\}$, d: t.ex. $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ och $\{c, i\}$. (Till c. och d. finns flera korrekta svar.)

a2) (4p) En plan, sammanhängande graf har 12 hörn och delar in planet i 9 ytor, inklusive den obegränsade ytan.

Vi känner valenserna för 11 av hörnen.

Av dem har 2 st valens 2, 6 st valens 3, 2 st valens 4 och ett har valens 5.

Vilken valens har det tolfte hörnet?

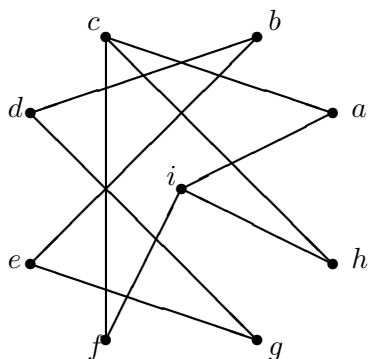
Lösning:

Grafen är plan och sammanhängande. Enligt Eulers polyederformel gäller $v - e + r = 2$, där v är antalet hörn, e antalet kanter och r antalet ytor. $v = 12$ och $r = 9$, så $e = 19$.

Summan av valenserna är två gånger antalet kanter, $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$, så om det tolfte hörnets valens kallas d fås $2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + d = 35 + d = 2 \cdot 19 = 38$, vilket ger $d = 3$.

Svar: Det tolfte hörnet har valens 3.

b1) Betrakta grafen G i figuren. För poäng räcker det här med (korrekta) svar.



- (1p) Är G en **sammanhängande** graf?
- (1p) Är G en **bipartit** graf?
- (1p) Ange två par av hörn i grafen så att G' , som uppstår om kanter mellan dessa par läggs till G , är en **eulersk** graf (dvs har en eulerkrets). G' skall vara en enkel graf, dvs sakna öglor och multipla kanter.
- (1p) Samma fråga som i c., men med tre par av hörn i stället för två.

Lösning:

- Grafen är **inte** sammanhängande. T.ex. finns ingen stig från a till b .
- Grafen **är** bipartit, ty med $X = \{a, b, f, g, h\}$ och $Y = \{c, d, e, i\}$ finns inga kanter inom X eller inom Y .
- En graf är eulersk precis om den är sammanhängande och alla hörn har jämn valens. För att G' skall bli eulersk måste c och i få varsin kant och komponenterna förbindas. En möjlighet är att ta $\{c, d\}$ och $\{d, i\}$.
- Nu kan man ta t.ex. $\{c, d\}$, $\{d, e\}$ och $\{e, i\}$.

Svar a: nej, b: ja, c: t.ex. $\{c, d\}$ och $\{d, i\}$, d: t.ex. $\{c, d\}$, $\{d, e\}$ och $\{e, i\}$. (Enligt ovan finns i c. och d. flera korrekta svar.)

b2) (4p) En plan, sammanhängande graf har 12 hörn och delar in planet i 8 ytor, inklusive den obegränsade ytan.

Vi känner valenserna för 11 av hörnen.

Av dem har 3 st valens 2, 7 st valens 3 och ett har valens 5.

Vilken valens har det tolfte hörnet?

Lösning:

Grafen är plan och sammanhängande. Enligt Eulers polyederformel gäller $v - e + r = 2$, där v är antalet hörn, e antalet kanter och r antalet ytor. $v = 12$ och $r = 8$, så $e = 18$.

Summan av valenserna är två gånger antalet kanter, $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$, så om det tolfte hörnets valens kallas d fås $3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + d = 32 + d = 2 \cdot 18 = 36$, vilket ger $d = 4$.

Svar: Det tolfte hörnet har valens 4.