

Matematik, KTH

B.Ek

Lösningsförslag ls4, Diskret matematik, 4 oktober 2011

A1) Låt H vara en delgrupp till S_7 (gruppen av alla permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) med $\pi, \sigma \in H$, där (på cykelform)

$$\pi = (1\ 4\ 7\ 3\ 5)(2\ 6), \quad \sigma = (2\ 3)(4\ 5\ 7).$$

a) (1p) Vad är ordningen för σ i H ?

b) (3p) Förklara varför H 's ordning, $|H|$, måste vara > 26 .

Lösning:

a) $o(\sigma) =$ minsta gemensamma multipeln av cykellängderna, så $\text{mgm}(2, 3) = 6$.

b) $o(\pi) = \text{mgm}(5, 2) = 10$ och $o(\sigma) \mid |H|$, så $|H| \geq \text{mgm}(6, 10) = 30 (> 26)$. Saken är klar.

Svar a): σ 's ordning är 6.

A2) Gruppen $(G, *)$ har precis 7 element, $G = \{q, r, s, t, u, v, w\}$.

Vi vet att

$$q * q = s, \quad s * s = w, \quad s * q = u \quad \text{och} \quad r * r = v.$$

a) (1p) Vad (dvs vilken av $q, \dots, w$) är $w * w$?

b) (2p) Vad är $r * t * v$?

c) (1p) Vilket element är enhetselementet i G ?

Lösning:

a) Enligt det givna är $s = q^2$, $w = s^2$, så $w = (q^2)^2 = q^4$ och $w * w = (q^4)^2 = q^8 = q^7 \cdot q$. Men eftersom $|G| = 7$ är $q^7 = 1$ och $w * w = q$.

b) q är inte enhetselementet 1 (ty $q * q \neq q$), så eftersom $|G|$ är ett primtal genererar q hela G . Vi vet att $q = q^1$, $s = q^2$, $w = q^4$ och $u = s * q = q^3$. De återstående elementen r, t, v är alltså (i någon ordning) q^0, q^5, q^6 , så deras produkt är $q^{0+5+6} = q^{11} = q^7 \cdot q^4 = 1 \cdot q^4 = w$.

c) Enligt ovan är en av r, t, v enhetselementet $1 = q^0$. Eftersom $r * r = v$ är $r \neq 1$ (annars vore $r * r = r$) och $v \neq 1$ ($o(r) \neq 2$, ty $2 \nmid 7$), så $t = 1$.

Svar: a): $w * w = q$, b): $r * t * v = w$, c): t är enhetselementet i G .

B1) Låt H vara en delgrupp till S_7 (gruppen av alla permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) med $\pi, \sigma \in H$, där (på cykelform)

$$\pi = (1\ 6\ 3)(2\ 5\ 4\ 7), \quad \sigma = (1\ 7\ 3\ 4\ 2)(5\ 6).$$

- a) (1p) Vad är ordningen för π i H ?
 b) (3p) Förklara varför H 's ordning, $|H|$, måste vara > 52 .

Lösning:

- a) $o(\pi) = \text{minsta gemensamma multipeln av cykellängderna, så } \text{mgm}(3, 4) = 12$.
 b) $o(\sigma) = \text{mgm}(5, 2) = 10$ och $o(\pi), o(\sigma) \mid |H|$, så $|H| \geq \text{mgm}(12, 10) = 60 (> 52)$. Saken är klar.

Svar a): π 's ordning är 12.

B2) Gruppen $(G, *)$ har precis 7 element, $G = \{t, u, v, w, x, y, z\}$.

Vi vet att

$$t * t = x, \quad x * x = y, \quad x * t = z \quad \text{och} \quad v * v = w.$$

- a) (1p) Vad (dvs vilken av $t, \dots, z$) är $y * y$?
 b) (2p) Vad är $u * v * w$?
 c) (1p) Vilket element är enhetselementet i G ?

Lösning:

- a) Enligt det givna är $x = t^2$, $y = x^2$, så $y = (t^2)^2 = t^4$ och $y * y = (t^4)^2 = t^8 = t^7 \cdot t$. Men eftersom $|G| = 7$ är $t^7 = 1$ och $y * y = t$.
 b) t är inte enhetselementet 1 (ty $t * t \neq t$), så eftersom $|G|$ är ett primtal genererar t hela G . Vi vet att $t = t^1$, $x = t^2$, $y = t^4$ och $z = x * t = t^3$. De återstående elementen u, v, w är alltså (i någon ordning) t^0, t^5, t^6 , så deras produkt är $t^{0+5+6} = t^{11} = t^7 \cdot t^4 = 1 \cdot t^4 = y$.
 c) Enligt ovan är en av u, v, w enhetselementet $1 = t^0$. Eftersom $v * v = w$ är $v \neq 1$ (annars vore $v * v = v$) och $w \neq 1$ ($o(v) \neq 2$, ty $2 \nmid 7$), så $u = 1$.

Svar: a): $y * y = t$, b): $u * v * w = y$, c): u är enhetselementet i G .