

Lösningsförslag ls3, Diskret matematik, 27 september 2011

A1) Kalle förbereder sig för en kommande tenta.

Han har 21 dagar kvar och tänker ägna 12 av dem åt att studera.

Var och en av övriga 9 dagar ägnas åt precis en av 3 aktiviteter (stranden, shoppa, sitta vid datorn), godtyckligt hur många av varje.

På hur många sätt kan hans schema för de 21 dagarna se ut (ett "schema" innebär att det för varje dag anges vilken av de fyra möjliga verksamheterna han ägnar sig åt)?

Lösning:

De 12 studiedagarna kan väljas på $\binom{21}{12} = \frac{21!}{12!(21-12)!}$ sätt (antalet 12-delmängder i en 21-mängd).

Var och en av de övriga 9 dagarna har 3 möjligheter för val av verksamhet (ordnat val med upprepning), så totalt 3^9 sätt välja dem.

Multiplikationsprincipen ger

Svar: Totala antalet scheman är $\frac{21!}{12!9!} \cdot 3^9 (= 5785424190)$.

A2) Permutationerna $\pi, \sigma, \tau \in S_9$ (dvs permutationer av $\mathbb{N}_9 = \{1, 2, \dots, 9\}$) ges nedan på tvåradarsform.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 7 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 1 & 9 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Ange π, σ och τ på cykelform.

b) Avgör om några av dem är **konjugerade** med varandra och ange i så fall vilka.

c) Finn produkten $\pi\sigma$ och inversen τ^{-1} på cykelform.

d) Avgör för var och en av π, σ, τ om den är en **jämn** eller en **udda** permutation.

Lösning:

a) $\pi(1) = 8, \pi(8) = 2$ etc, så man finner

$\pi = (1\ 8\ 2\ 4\ 5\ 7)(3\ 6\ 9), \sigma = (1\ 6)(2\ 7\ 4)(3\ 9\ 8\ 5), \tau = (1\ 7\ 4)(2\ 5\ 9\ 3\ 8\ 6)$.

b) Eftersom π och τ har samma cykelstruktur ([36]), men inte σ , är de konjugerade med varandra, men inte med σ .

c) I $\pi\sigma$ verkar först σ och sedan π . Man finner $\pi\sigma = (1\ 9\ 2)(3)(4)(5\ 6\ 8\ 7)$ och $\tau^{-1} = (4\ 7\ 1)(6\ 8\ 3\ 9\ 5\ 2)$.

d) Tecknet (signum) för π ges av $(-1)^{n-c(\pi)} = (-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\dots}$, där $n = 9$ i vårt fall och $c(\pi)$ är antalet cykler i π . Man får för π $(-1)^{9-2} = -1$, för σ $(-1)^{9-3} = 1$ och för τ $(-1)^{9-2} = -1$, så

Svar: a): $\pi = (1\ 8\ 2\ 4\ 5\ 7)(3\ 6\ 9), \sigma = (1\ 6)(2\ 7\ 4)(3\ 9\ 8\ 5),$

$\tau = (1\ 7\ 4)(2\ 5\ 9\ 3\ 8\ 6)$, b): π och τ är konjugerade med varandra, men inte med σ . c): $\pi\sigma = (1\ 9\ 2)(3)(4)(5\ 6\ 8\ 7)$ och

B1) Lisa har 35 (olika) presenter som alla skall slås in med omslagspapper. Hon har vitt, rött blått, grönt och svart papper.

På hur många olika sätt kan hon välja färg till de olika paketen om det skall vara precis 17 vita paket och de fyra andra färgerna kan förekomma godtyckliga antal gånger (eventuellt 0)?

Med ett "sätt" att välja färg menas att det för varje present anges vilken färg den skall slås in med.

Lösning:

De 17 vita paketen kan väljas på $\binom{35}{17} = \frac{35!}{17!(35-17)!}$ sätt (antalet 17-delmängder i en 35-mängd).

Var och en av de övriga 18 paketens färger kan väljas på 4 sätt (ordnat val med upprepning), så totalt 4^{18} sätt välja dem.

Multiplikationsprincipen ger

Svar: Totala antalet möjliga sätt att välja färger till paketen är $\frac{35!}{17!18!} \cdot 4^{18} (= 311819274562201190400)$.

B2) Permutationerna $\pi, \sigma, \tau \in S_9$ (dvs permutationer av $\mathbb{N}_9 = \{1, 2, \dots, 9\}$) ges nedan på tvåradsform.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 3 & 9 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 2 & 7 & 9 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Ange π, σ och τ på cykelform.

b) Avgör om några av dem är **konjugerade** med varandra och ange i så fall vilka.

c) Finn produkten $\pi\sigma$ och inversen τ^{-1} på cykelform.

d) Avgör för var och en av π, σ, τ om den är en **jämn** eller en **udda** permutation.

Lösning:

a) $\pi(1) = 7, \pi(7) = 4$ etc, så man finner

$$\pi = (1\,7\,4\,3\,8)(2\,6)(5\,9), \sigma = (1\,3\,7\,6)(2\,8)(4\,9\,5), \tau = (1\,6\,9)(2\,8\,3\,4)(5\,7).$$

b) Eftersom σ och τ har samma cykelstruktur $([234])$, men inte π , är de konjugerade med varandra, men inte med π .

c) I $\pi\sigma$ verkar först σ och sedan π . Man finner $\pi\sigma = (1\,8\,6\,7\,2)(3\,4\,5)(9)$ och $\tau^{-1} = (9\,6\,1)(4\,3\,8\,2)(7\,5)$.

d) Tecknet (signum) för π ges av $(-1)^{n-c(\pi)} = (-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\dots}$, där $n = 9$ i vårt fall och $c(\pi)$ är antalet cykler i π . Man får för π $(-1)^{9-3} = 1$, för σ $(-1)^{9-3} = 1$ och för τ $(-1)^{9-3} = 1$, så

Svar: a): $\pi = (1\,7\,4\,3\,8)(2\,6)(5\,9), \sigma = (1\,3\,7\,6)(2\,8)(4\,9\,5),$

$\tau = (1\,6\,9)(2\,8\,3\,4)(5\,7)$, b): σ och τ är konjugerade med varandra, men inte med π , c): $\pi\sigma = (1\,8\,6\,7\,2)(3\,4\,5)(9)$ och

$\tau^{-1} = (9\,6\,1)(4\,3\,8\,2)(7\,5)$, d): π, σ och τ är alla jämna.
