Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks2, 25 september 2017, i SF1688 Diskret matematik

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)	**sant**	**falskt**
a) $a_{n+3} = 3\,a_{n+2} + 5\,a_{n+1} - 14\,a_n + 5 \cdot 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ uppfylls för någon konstant c av $a_n = c \cdot 2^n$. [Nej. 2^n löser den homogena ekvationen.]		×
b) För alla $\pi \in S_{18}$ (mängden av permutationer av $\{1, 2, \ldots, 18\}$) gäller att π och π^{-1} är konjugerade permutationer. [Ja, de har samma cykelstruktur och är därmed konjugerade.]	×	
c) Om G och H är grupper, är grupperna $G \times H$ och $H \times G$ (de direkta produkterna) säkert isomorfa. [Ja. En isomorfi ges av $\beta((g, h)) = (h, g)$.]	×	
d) Alla grupper av ordning 41 är abelska. [Ja, eftersom 41 är ett primtal är de alla (isomorfa och) cykliska, så abelska.]	×	
e) Om K är en delgrupp till $G \times H$ (G, H grupper), måste $K = \{(g, h) \mid g \in G_1,\ h \in H_1\}$ för delgrupper G_1, H_1 till G, H. [Nej, t.ex. är $\{(1, 1), (x, x)\}$ en delgrupp till $C_2 \times C_2$.]		×
f) Om H är en delgrupp till gruppen G och $g \in G$ finns säkert ett $g' \in G$ med $gH = Hg'$. [Nej, vänstersidoklasser behöver inte vara högersidoklasser (t.ex. inte då $H = \{i, x\}$ i $G_\triangle$).]		×

2a) (1p) Vi söker alla $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ med $a_{n+2} = a_{n+1} + 6\,a_n$ för $n \in \mathbb{N}$ och $a_0 = 2$.

Lösning:

Rekursionsekvationen är (linjär med konstanta koefficienter och) homogen. Dess karakterisitiska ekvation $x^2 = x + 6$ har två rötter $r_1 = 3$, $r_2 = -2$, båda enkla. Allmänna lösningen till rekursionsekvationen är alltså $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n$, A, B godtyckliga kontanter. Villkoret $a_0 = 2$ ger $A + B = 2$, så $A = 2 + C$, $B = -C$ och $a_n = 2 \cdot 3^n + C \cdot (3^n - (-2)^n)$, C en godtycklig konstant.

Svar: $\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^n + C \cdot (3^n - (-2)^n)}$**,** $\boldsymbol{C}$ **en godtycklig konstant.**

---

b) (1p)$(G, *)$ är en grupp, $|G| = 11$ och $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ är alla olika och uppfyller $g_1 * g_1 = g_2$, $g_2 * g_2 = g_3$, $g_2 * g_3 = g_4$. Vi söker $g_4 * g_4$.

Lösning:

g_1 är inte G:s identitetselement ($g_1 * g_1 \neq g_1$), så $o(g_1) = 11$ ($o(g_1) \mid 11$ och > 1). Med $a = g_1$ får vi $g_2 = a^2$, $g_3 = a^4$, $g_4 = a^6$, så $g_4 * g_4 = a^{12} = a^{11} * a = a = g_1$.

Svar: $\boldsymbol{g_4 * g_4 = g_1}$**.**

---

c) (1p) Vi skall ge definitionen av en normal delgrupp N till en grupp G.

Lösning:

Delgruppen N är normal omm vänstersidoklasser = högersidoklasser, dvs $gN = Ng$ för alla $g \in G$.

---

3) $\pi, \sigma \in S_8$ ges av $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 8&6&9&4&5&3&2&1&7 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 3&7&8&2&9&5&4&1&6 \end{smallmatrix}\right)$.
Vi söker (a, 1p) π, σ och $\pi\sigma$ på cykelform, (b, 1p) ordningarna för π, σ och $\sigma\pi$ och (c, 1p) pariteterna (jämn eller udda) för π, σ och $\pi\sigma^{-2}\pi^3\sigma^4\pi^{-5}$.

Lösning:

a) $\pi(1) = 8$, $\pi(8) = 1$, $\pi(2) = 6$ etc ger $\pi = (1\,8)(2\,6\,3\,9\,7)(4)(5)$ och pss
$\sigma = (1\,3\,8)(2\,7\,4)(5\,9\,6)$. För $\pi\sigma$ (först σ, sedan π) fås $\pi\sigma = (1\,9\,3)(2)(4\,6\,5\,7)(8)$.
b) $o(\pi) = \text{mgm}(2, 5, 1, 1) = 10, o(\sigma) = \text{mgm}(3, 3, 3) = 3, o(\sigma\pi) = o(\pi\sigma\pi\pi^{-1}) =$
$= o(\pi\sigma) = \text{mgm}(3, 1, 4, 1) = 12$ (alt. $\sigma\pi = (1)(2\,5\,9\,4)(3\,6\,8)(7)$ etc).
c) En permutation är jämn precis om antalet cykler av jämn längd är jämnt, så π är udda och σ är jämn. Produkten $\pi\sigma^{-2}\pi^3\sigma^4\pi^{-5}$ innehåller de udda permutationerna π, π^{-1} ett udda antal (9) gånger (och de jämna σ, σ^{-1} ett antal gånger), så den är udda.
Svar a: $\boldsymbol{\pi = (1\,8)(2\,6\,3\,9\,7)}$, $\boldsymbol{\sigma = (1\,3\,8)(2\,7\,4)(5\,9\,6)}$,
$\boldsymbol{\pi\sigma = (1\,9\,3)(4\,6\,5\,7)}$,
b: $\boldsymbol{o(\pi) = 10}$, $\boldsymbol{o(\sigma) = 3}$, $\boldsymbol{o(\sigma\pi) = 12}$,
c: $\boldsymbol{\pi}$ är udda, $\boldsymbol{\sigma}$ är jämn och $\boldsymbol{\pi\sigma^{-2}\pi^3\sigma^4\pi^{-5}}$ är udda.

---

4) $(G, *)$, där $G = \{p, q, r, s, t, u\}$, är en grupp med 6 element och grupptabellen till höger. Vi skall
(a, 1p) finna G:s identitetselement,
(b, 1p) finna en delgrupp H med $|H| = 2$ och
(c, 1p) finna alla H:s sidoklasser i G.

$*$	p	q	r	s	t	u
p	t	r	u	p	s	q
q	u	s	t	q	r	p
r	q	p	s	r	u	t
s	p	q	r	s	t	u
t	s	u	q	t	p	r
u	r	t	p	u	q	s

Lösning:

a. $p * s = p$, så s måste vara identitetselementet (och $s * x = x * s = x$ för alla $x \in G$).
b. H kan vara $\{s, x\}$, där $x * x = s$, $x \neq s$ (identitetselementet). Vi tar $H = \{s, q\}$.
c. Man finner $s * H = q * H = \{s, q\}(= H)$, $H * s = H * q = \{s, q\}(= H)$,
$p * H = r * H = \{p, r\}$, $H * p = H * u = \{p, u\}$,
$t * H = u * H = \{t, u\}$. $H * r = H * t = \{r, t\}$.
Svar a: $\boldsymbol{s}$ är identitetselement, b: t.ex. $\boldsymbol{H = \{s, q\}}$,
c: vä: $\boldsymbol{\{s, q\}}$, $\boldsymbol{\{p, r\}}$, $\boldsymbol{\{t, u\}}$, hö: $\boldsymbol{\{s, q\}}$, $\boldsymbol{\{p, u\}}$, $\boldsymbol{\{r, t\}}$.

---

5) (3p) Vi skall avgöra om gruppen $(\mathbb{Z}_{73} \setminus \{0\}, \cdot)$ genereras av elementet $22(= 17^3)$.

Lösning:

Eftersom $|\mathbb{Z}_{73} \setminus \{0\}| = 72$, gäller $g^{72} = 1$ för alla $g \in \mathbb{Z}_{73} \setminus \{0\}$.
$1 = 17^{72} = (17^3)^{24} = 22^{24}$, så $o(22) \leq 24$, mindre än gruppens ordning, så 22 genererar inte gruppen.
Svar: Nej, 22 genererar inte gruppen $(\mathbb{Z}_{73} \setminus \{0\}, \cdot)$.
