

**Svar och lösningsförslag till ks1, 11 september 2017,
i SF1688 Diskret matematik**

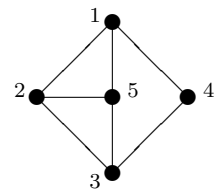
	sant	falskt
1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$)		
a) Om grafen $G = (V, E)$ har ett udda antal hörn (vertices), $ V $, är antalet hörn med jämn valens (degree) säkert udda. [Javisst. Jämna är de hörn som inte är udda, vilket ett jämnt antal är.]	×	
b) Om grafen $G = (V, E)$ är 6-reguljär (dvs varje hörn (vertex) har valens (degree) 6) är $ E $ säkert delbart med 6. [Nej. Motexempel: K_7 är 6-reguljär och har precis 21 kanter.]		×
c) En bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ ($X \cap Y = \emptyset$, $e \in E \Rightarrow e \cap X = 1$) är hamiltonsk (dvs har en hamiltoncykel) omm $ X = Y $. [Nej. $\Rightarrow$, men inte alls $\Leftarrow$. T.ex. inte om $E = \emptyset$, $ X = Y > 0$.]		×
d) Det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ för en graf G är säkert produkten av dem för G 's komponenter. [Ja. Komponenterna kan färgas oberoende av varandra.]	×	
e) Om G är en plan, sammanhängande graf måste minst en av de ytor G delar in planet i ha högst 5 kanter. [Nej. Motex: en plan ritning av C_6 ($G^\perp$ behöver inte vara enkel).]		×
f) Om en graf med högsta valens k kan hörnfärgas med 2 färger, kan den säkert kantfärgas med k färger. [Ja. Bipartit, så den kan enligt känd sats k -kantfärgas.]	×	

2a) (1p) Vi visar med en figur att grafen G med grannmatris $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ är planär.

Lösning:

En graf är planär precis om den är isomorf med (dvs kan ritas som) en plan graf. I figuren är G ritad plan.

Många andra sätt att rita är möjliga. (Det är förstås tillåtet med krökta kanter.) De små siffrorna svarar mot radernas numrering i matrisen.



b) (1p) Sökt är det kromatiska talet för grafen G med kromatiskt polynom $P_G(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^4((\lambda - 1)^3 + 1)$.

Lösning:

$P_G(0) = P_G(1) = P_G(2) = 0$, $P_G(3) = 18$ betyder att G inte kan hörnfärgas med 0, 1 eller 2 färger, men att det går med 3 färger, så **Svar: $\chi(G) = 3$.**

c) (1p) Vi skall formulera Halls villkor för existens av en $(X-)$ fullständig matchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$.

Lösning:

Villkoret är att för alla $A \subseteq X$ gäller $|J(A)| \geq |A|$,
där $J(A) = \{y \in Y \mid \{a, y\} \in E \text{ för något } a \in A\}$.

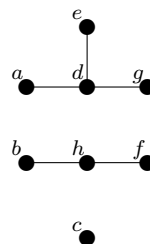
3) Grafen G beskrivs av **granntabellen**:

Vi skall (a, 2p) lägga till ett hörn x och kanter mellan x och hörn i G , så att ett träd bildas och (b, 1p) ange på hur många sätt det kan göras.

a	b	c	d	e	f	g	h
d	h		a	d	h	d	b
			e				f
			g				

Lösning:

a) G består av tre komponenter (alla utan cykler, dvs träd) med hörnmängder $\{a, d, e, g\}$, $\{b, f, h\}$ och $\{c\}$. Resultatet då x med kanter läggs till G blir sammanhängande precis om x har minst en granne i varje komponent och utan cykler blir det precis om x inte har två grannar i någon komponent. Resultatet blir alltså ett träd precis om x har exakt en granne i var och en av G 's komponenter. x 's grannar kan alltså t.ex. vara a , b och c .



b) x 's granne i första komponenten kan väljas på 4 sätt, den i den andra på 3 sätt och i den tredje komponenten måste det vara c . Multiplikationsprincipen ger det totala antalet sätt att välja x 's grannar som $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$.

Svar a: x 's grannar kan vara a , b och c . b: De kan väljas på 12 sätt.

(Det finns enligt ovan förstås (se b) fler korrekta svar i a.)

4) (3p) Vi söker antalet hörn i en 3-reguljär, plan och sammanhängande graf som har 3 hörn mer än det antal ytor den delar in planet i.

Lösning:

Låt grafen ha v hörn, e kanter och $r = v - 3$ ytor.

$\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$ ger $3v = 2e$ och Eulers polyederformel (plan, sammanhängande graf) $v - e + r = 2$ ger $2v - 2e + 2r = 4$, så $2v - 3v + 2(v - 3) = 4$ och $v = 10$.

Svar: Grafen har 10 hörn.

5) (3p) Vi ska avgöra om var och en av 15 studenter kan ges sin egen sats som han eller hon tycker om, bland 22 st, då var och en tycker om minst 6 av satserna, högst sex av studenterna tycker om färre än 11 och varje sats är omtyckt av minst fyra.

Lösning:

Det gäller att avgöra om det finns en (X -)fullständig matchning i den bipartita grafen $G = (X \cup Y, E)$, med X mängden av studenter, Y mängden av satser och (för $x \in X, y \in Y$) $\{x, y\} \in E$ omm x tycker om y .

Enligt Halls sats (uppgift 2c) finns en sådan matchning omm $|J(A)| \geq |A|$ för alla $A \subseteq X$.

Om $|A| = 0$ är $|J(A)| = 0$ ($J(A) = \emptyset$ om $A = \emptyset$)
 $1 \leq |A| \leq 6$ $|J(A)| \geq 6$ (varje $x \in X$ har minst 6 grannar)
 $7 \leq |A| \leq 11$ $|J(A)| \geq 11$ (minst ett $x \in A$ har minst 11 grannar)
 $12 \leq |A| \leq 15$ $|J(A)| = 22$ (varje $y \in Y$ granne med minst ett $x \in A$).

Så $|J(A)| \geq |A|$ för alla $A \subseteq X$ och en sådan matchning finns säkert.

Svar: Ja, en sådan tilldelning av satser är säkert möjlig.