Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till fiktiva ks2, september 2017, i SF1688 Diskret matematik

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)

		sant	falskt
a)	Två permutationer $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade** omm $\sigma\alpha = \beta\sigma$ för något $\sigma \in S_n$ (permutationerna av $\{1, 2, \ldots, n\}$). [Jadå. Ekvivalent med definitionen att $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ för något $\sigma \in S_n$.]	X	
b)	För varje **udda** permutation π av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ är $\pi^2(k) = k$ för något $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. [Ja. Möjliga cykelstrukturer är [14], [23], [$1^3$2], så minst en 1-cykel i π^2.]	X	
c)	Om $(G, *)$ är en grupp och $a*(b*c) = (a*b)*c$ för alla $a, b, c \in G$, är G säkert en cyklisk grupp. [Nej. Likheten gäller i alla grupper (associativitet) och det finns icke-cykliska grupper.]		X
d)	För alla grupper G och alla $x, y \in G$ med $x^2 = y^2$ är $x = y$. [Nej. Motex: i gruppen $(\{1, -1\}, \cdot)$, är $1^2 = (-1)^2$, $1 \neq -1$.]		X
e)	Om A, B är högersidoklasser till samma delgrupp H till gruppen G, finns det säkert en bijektion $f : A \to B$. [Jadå. Om $A = Hg_1$, $B = Hg_2$ ger $f(a) = ag_1^{-1}g_2$ en sådan bijektion.]	X	
f)	Om $\{a_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ och $\{a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ båda uppfyller att $a_{n+2} = 7\,a_{n+1} - 2\,a_n + 1$ för $n \in \mathbb{N}$, gör också $\{a_n^{(3)}\}_{n=0}^{\infty}$ det då $a_n^{(3)} = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$. [Nej. Evationen är inte homogen.]		X

2a) (1p) $\phi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ ges av $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 2$, $\phi(2) = 1$. Vi ska avgöra om ϕ är en isomorfi av gruppen $(\mathbb{Z}_3, +)$ på sig själv (en automorfi).

Lösning:

i) ϕ är en bijektion (injektion och surjektion). *ii)* $\phi(x) = -x$ (alla $x \in \mathbb{Z}_3$), så $\phi(x+y) = -(x+y) = (-x) + (-y) = \phi(x) + \phi(y)$ (alla $x, y \in \mathbb{Z}_3$).
i),ii) ger (enligt definition) att ϕ är en automorfi.

Svar: Ja, $\boldsymbol{\phi}$ är en automorfi för $(\mathbb{Z}_3, +)$.

b) (1p) $g \in G$, en grupp, uppfyller $g^{75} = 1$. Vi söker möjliga värden för $o(g)$.

Lösning:

Ordningen måste vara en delare till 75 och alla positiva delare till 75 (dvs 1, 3, 5, 15, 25, 75) är möjliga ordningar för g (de förekommer i den cykliska C_{75}).

Svar: Alla möjliga värden för $\boldsymbol{o(g)}$ är 1, 3, 5, 15, 25, 75.

c) (1p) Vi söker alla $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ med $a_{n+3} = 7\,a_{n+2} - 15\,a_{n+1} + 9\,a_n$ för $n \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Ekvationen är linjär med konstanta koefficienter och homogen. Dess karakteristiska ekvation $x^3 - 7\,x^2 + 15\,x - 9$ har en enkelrot $r_1 = 1$ och en dubbelrot $r_{2,3} = 3$, så den sökta allmänna lösningen är $a_n = A \cdot 1^n + (Bn + C) \cdot 3^n$, där A, B, C är godtyckliga konstanter.

Svar: $\boldsymbol{a_n = A + (Bn + C) \cdot 3^n}$, där $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ är godtyckliga konstanter.

3) $\pi, \sigma \in S_7$ ges av $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Vi ska (a, 2p) ange π, π^{-1} och $\pi\sigma$ på cykelform och (b, 1p) finna ett $\tau \in S_7$ sådant att $\tau\pi$ har ordning 12.

Lösning:

a. $\pi(1) = 7$, $\pi(7) = 5$, $\pi(5) = 2, \ldots$ ger i cykelform $\pi = (1\,7\,5\,2)(3\,6)(4)$, så (cyklerna baklänges) $\pi^{-1} = (1\,2\,5\,7)(3\,6)(4)$.
P.s.s. $\sigma = (1\,6\,4\,5)(2)(3\,7)$ och $\pi\sigma = (1\,7\,5\,2)(3\,6)(1\,6\,4\,5)(3\,7) = (1\,3\,5\,7\,6\,4\,2)$.
b. Eftersom $o(\tau\pi) = \text{mgm av dess cykellängder} = 12$, måste en cykellängd vara delbar med 3 och en med 4. Enda möjliga typen för $\tau\pi$ är [34]. **T.ex.** kan man ta $\tau\pi = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)$, dvs $\tau = (\tau\pi)\pi^{-1} = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(1\,2\,5\,7)(3\,6) = (1\,3\,7\,2\,6\,4)(5)$.

Svar a: $\boldsymbol{\pi = (1\,7\,5\,2)(3\,6)}$, $\boldsymbol{\pi^{-1} = (1\,2\,5\,7)(3\,6)}$ och $\boldsymbol{\pi\sigma = (1\,3\,5\,7\,6\,4\,2)}$,
b: T.ex. $\boldsymbol{\tau = (1\,3\,7\,2\,6\,4)}$. (Det går förstås också bra att skriva ut 1-cyklerna.)

---

4) $(G, *)$, där $G = \{u, v, x, y, z\}$, är en grupp med 5 element och $u * u = x$, $u * x = y$, $u * y = z$. Vi söker (a, 1p) $o(u)$, u:s ordning, (b, 1p) G:s identitetselement och (c, 1p) hela G:s grupptabell.

Lösning:

a. $|G| = 5$, ett primtal, och $o(u) \neq 1$ ($u \neq 1$ (identitetselementet), ty $u^2 \neq u$). $o(u) \mid |G|$, så $o(u) = 5$.
b. $u*v \neq x, y, z$ (grupptabellen är en latinsk kvadrat) och $u*v \neq v$ ($u \neq 1$ enligt a.), så $u * v = u$ (latinsk kvadrat igen) och v är identitetselementet. (alt. $x = u^2$, $y = u^3$, $z = u^4$, alla $\neq 1$, så $v = 1$.)
c. $v = 1$, $u = u^1$, $x = u^2$, $y = u^3$, $z = u^4$ ger med $u^5 = 1$ tabellen härintill.

$*$	u	v	x	y	z
u	$\boldsymbol{x}$	u	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z}$	v
v	u	v	x	y	z
x	y	x	z	v	u
y	z	y	v	u	x
z	v	z	u	x	y

Svar a: $\boldsymbol{o(u) = 5}$, b: $\boldsymbol{v}$ är identitetselementet, c: Se ovan.

---

5) $G = U_{22}$, gruppen av inverterbara element i $(\mathbb{Z}_{22}, \cdot)$. Vi ska (a, 1p) finna $|G|$ och (b, 2p) avgöra om G är cyklisk och i så fall ange en generator för G.

Lösning:

a. $G = U_{22} = \{x \in \mathbb{Z}_{22} \mid \text{sgd}(x, 22) = 1\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21\}$, så $|G| = 10$.
b. G är cyklisk omm något $g \in G$ har ordning $o(g) = |G| = 10$.
Eftersom $o(g) \mid 10$ är $o(g) = 10$ omm $o(g) \neq 1, 2, 5$. ($o(g) = 1$ omm $g = 1$.)
Vi prövar: $3^2 = 9$, $3^5 = 9{\cdot}9{\cdot}3 = (-7){\cdot}3 = 1$, $5^2 = 25 = 3$, $5^5 = 3{\cdot}3{\cdot}5 = 45 = 1$, men $7^2 = 5$, $7^5 = 5 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21 \neq 1$, så $o(7) = 10$.

Svar a: $\boldsymbol{|G| = 10}$, b: $\boldsymbol{G}$ är cyklisk. 7 är en generator (liksom 13, 17, 19).
