

Uppgiften om kaniner och möss, med lösning

a) (3p) De sju syskonen kanin skall dela på ett antal morötter.

Då rotsakerna fördelats på sju lika högar är 3 stycken över. Dem äter storasyster kanin upp och somnar sedan.

Sex vakna kaniner delar rötterna från de sju högarna i sex lika högar. Storebror äter upp de 3 som nu blev över – och somnar.

Fem vakna kaniner delar de sex högarna i fem lika högar, det blir 2 över.

Hur många var det från början, om det var färre än 300 stycken?

b) (3p) Nio syskon mus delar ett stort antal ostbitar i nio lika högar.

Storebror äter upp de 4 som blev över och somnar. Lillebror går med en hög.

Sju möss delar bitarna i kvarvarande åtta högar i sju lika högar. Storasyster äter upp de 2 som blev över och somnar. Lillasyster tar en hög och går.

Då man delar övriga sex högar i fem lika delar blir det 1 bit över.

Från början fanns mellan 300 och 700 ostbitar. Hur många var det?

Lösningar:

a) Låt antalet morötter vara x .

Vid delning på 7 lika högar blev 3 över, så $x \equiv_7 3$.

Då alla utom de 3 delas på 6 lika högar blir åter 3 över, så $x - 3 \equiv_6 3$, dvs $x \equiv_6 6 \equiv_6 0$.

Då alla utom de totalt 6 delas på 5 lika högar blir 2 över, så $x - 6 \equiv_5 2$, dvs $x \equiv_5 8 \equiv_5 3$.

Eftersom 5, 6, 7 är relativt prima och $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, bestämmer dessa villkor x entydigt mod 210 (Kinesiska restsatsen).

$13 \cdot 7 + (-3) \cdot 30 = 1$, så $-90 \equiv_5 0, \equiv_6 0, \equiv_7 1$ och

$17 \cdot 5 + (-2) \cdot 42 = 1$, så $-84 \equiv_5 1, \equiv_6 0, \equiv_7 0$.

(Fås med prövning eller med Euklides algorit.)

Således är $x \equiv_{210} 3 \cdot (-90) + 3 \cdot (-84) = -522 \equiv_{210} 108$.

Det enda positiva sådana $x < 300$ är 108, så **det fanns 108 morötter**.

b) Låt nu antalet ostbitar vara x .

9 lika högar ger 4 över, så $x \equiv_9 4$.

Då de 4 och en av högarna tas bort och resten delas på 7 blir 2 över, så $\frac{8}{9}(x - 4) \equiv_7 2$, så $8(x - 4) \equiv_7 9 \cdot 2 = 18 \equiv_7 4$, så $x \equiv_7 8x \equiv_7 4 + 8 \cdot 4 \equiv_7 1$.

Då de 2 och en hög tas bort och resten delas på 5 blir 1 över, så $\frac{6}{7}(\frac{8}{9}(x - 4) - 2) \equiv_5 1$, så $\frac{8}{9}(x - 4) - 2 \equiv_5 6(\frac{8}{9}(x - 4) - 2) \equiv_5 7 \cdot 1 \equiv_5 2$, så $\frac{8}{9}(x - 4) \equiv_5 2 + 2 = 4$, så $3(x - 4) \equiv_5 8(x - 4) \equiv_5 9 \cdot 4 \equiv_5 1$. Eftersom $3^{-1} = 2$ i $\mathbb{Z}_5$ ger det att $x - 4 \equiv_5 2$, så $x \equiv_5 4 + 2 \equiv_5 1$.

Då 5, 7, 9 är relativt prima och $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ bestämmer villkoren x entydigt mod 315.

$4 \cdot 9 + (-1) \cdot 35 = 1$, så $-35 \equiv_5 0, \equiv_7 0, \equiv_9 1$,

$13 \cdot 7 + (-2) \cdot 45 = 1$, så $-90 \equiv_5 0, \equiv_7 1, \equiv_9 0$ och

$(-25) \cdot 5 + 2 \cdot 63 = 1$, så $126 \equiv_5 1, \equiv_7 0, \equiv_9 0$.

Således är $x \equiv_{315} 4 \cdot (-35) + 1 \cdot (-90) + 1 \cdot 126 = -104 \equiv_{315} 211$. Det enda sådana x mellan 300 och 700 är $211 + 315 = 526$, så **det fanns 526 ostbitar**.