

Några extra exempel

Övning 1, fr 6 september

1. Minns **fibonaccitalen** F_n : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}.$$

Visa att för alla $n = 1, 2, \dots$ gäller

$$F_1^2 + \dots + F_n^2 = \sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} \text{ och } \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

2. I en graf med åtta hörn har sju av hörnen valenserna $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7$. Vilka värden är möjliga för det åttonde hörnets valens?
3. Visa att om valensen för alla hörn i grafen $G = (V, E)$ delas av primtalet $p \neq 2$, dvs $p \mid \delta(v)$, för alla $v \in V$, så gäller att talet p delar antalet kanter e , dvs $p \mid |E|$.
4. Hur många hörn kan en graf med 28 kanter ha som mest, om valensen hos varje hörn är minst 3?

Övning 2, on 11 september

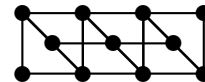
1. Det är i allmänhet svårt att avgöra om en (stor) graf har någon hamiltoncykel (i motsats till att avgöra om den har någon eulerkrets). Detta exempel illustrerar ett sätt (som fungerar ibland) att visa att en graf **inte** har någon hamiltoncykel.

a. Visa att om m och n är udda heltal (inte båda $= 1$) kan en springare inte i en följd drag besöka alla rutor på ett $m \times n$ -”schackbräde” precis en gång och återkomma till startpunkten. (En springare går i ett drag två rutor framåt och en åt sidan.)

b. Visa samma sak för ett bräde av format $4 \times n$, n heltal.

2. Har grafen till höger någon hamiltoncykel?

Ge exempel eller förklara varför ingen finns.



3. Visa att om för varje par av hörn x och y i en graf G med n hörn gäller att

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$$

så är grafen sammanhängande.

4. Visa att om en graf G är osammanhängande så måste komplementgrafen $\overline{G}$ vara sammanhängande.

5. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. Visa att hörnen i V kan färgas med högst två färger, så att varje hörn har samma färg som högst hälften av sina grannar.

Övning 3, fr 13 september

1. Antag att G är en sammanhängande 4-reguljär graf som dessutom är planär. Hur många ytor har en plan ritning av G om G har 16 kanter?

2. (Från planaritetsstencilen) I en sammanhängande plan graf har alla hörn valens 3 eller 5. Antalet hörn är 12 och antalet ytor är 11. Hur många hörn har valens 3 och hur många har valens 5?

3. (Från planaritetsstencilen) I en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf har alla ytor antingen 4 eller 6 kanter (också den obegränsade ytan). Hur många ytor har 4 kanter?

4. Den s.k. Petersens graf (se även Biggs 15.2:2 och 15.8:3) har grannlista

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e	(Ett vanligare (än som i fig. 15.14 i Biggs)
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g	sätt att rita grafen är som en femhörning
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h	med hörn i ordningen $abcde$ och innanför
										dem deras respektive grannar $fghij$ (som
										blir spetsar i en inre stjärna).)

Visa med hjälp av dels Kuratowskis och dels Wagners sats (se planaritetsstencilen) att Petersens graf inte är planär.

5. Tio tentander har gjort en tentamen med tio uppgifter. Varje uppgift klarades av minst sex skrivande. Varje skrivande klarade minst fyra uppgifter. Visa att man kan fördela uppgifterna med en per tentand, så att var och en har klarat sin uppgift.

Övning 4, on 18 september

1. Finn den största gemensamma delaren till talen 2373 och 1638, $\text{sgd}(2373, 1638)$ (i boken kallad $\text{gcd}(2373, 1638)$) och använd den för att beräkna samma tals minsta gemensamma multipel, $\text{mgn}(2373, 1638)$ (i boken kallad $\text{lcm}(2373, 1638)$).

2. Låt k vara ett heltal. Visa att $3k + 2$ och $5k + 3$ är relativt prima, dvs att $\text{sgd}(3k + 2, 5k + 3) = 1$.

3. Emma har 75 kr, allt i 16 st kronmynt (dvs 1-, 5- och 10-kronor). Hur många mynt av varje sort har hon?

4. Är det för alla heltal n sant att om $10 \mid n^2$ så gäller $10 \mid n$?
Är det för alla heltal n sant att om $9 \mid n^2$ så gäller $9 \mid n$?

Övning 5, fr 20 september

- 1*. Talet 2^{29} har (i bas 10) 9 siffror, alla olika. Vilken siffra fattas?
2. Visa att om heltalen x, y, z uppfyller $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ så är $x = y = z = 0$.
3. Kalla en trippel heltal (a, b, c) för en **pythagoreisk trippel** om $a^2 + b^2 = c^2$, dvs om a, b, c är (mätetal för) sidorna i en rätvinklig triangel. Exempel på pythagoreiska trippler är $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$ och $(3312, 16766, 17090)$. Visa att om (a, b, c) är en pythagoreisk trippel måste
- minst en av a och b vara delbar med 3,
 - minst en av a, b och c vara delbar med 5,
 - minst en av a och b vara delbar med 4.
- 4*. Finn alla heltal x, y och z så att $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Övning 6, to 26 september

1. Ge exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, så att sammansättningen $gf : X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det.
- Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att $X = Y = Z$.
- 2*. Enligt den sats av Cantor som presenterades på föreläsningen är potensmängden till $\mathbb{N}$ inte uppräknelig, dvs det finns överuppräkneligt många mängder av naturliga tal, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.
- Visa att antalet **ändliga** mängder av naturliga tal är uppräkneligt, dvs

$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|,$$

där $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty\}$.

Ledning: Det finns en enkel bijektion mellan $\mathbb{N}$ och $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$.

3. Hur många positiva delare till talet 2646000 finns det??
4. På hur många sätt kan 13 personer placeras på 13 olika stolar kring ett runt bord, utan att Lisa och Olle (som är bland de 13) sitter bredvid varandra?
- 5*. Vad är för $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}?$$

Visa det. ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ är heltalsdelen av $\frac{n}{2}$, det största heltalet som är $\leq \frac{n}{2}$.)

6. Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ vara heltal. Visa att det finns en icke-tom delmängd av dem, vars summa är delbar med n .

- 7*. Låt $k > 0$ vara ett naturligt tal.

Visa att det finns ett $n > 0$, så att $k \mid F_n$, där F_n är fibonaccitalet nr n , som vanligt definierat av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{alla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Övning 7, fr 4 oktober

1. Finn arean för en sfärisk triangel med vinklarna α, β, γ på en sfär med radie R . En sfärisk triangel har delar av tre storcirkclar som sidor och en sfär med radie R har arean $4\pi R^2$.

Övning 8, to 10 oktober

1. I en familj bestående av 4 personer förekommer alla de sju dödssynderna (högmod, girighet, vällust, avund, frosseri, vrede och lättja). Varje person hemfaller tyvärr åt minst en av synderna, men dessbättre förekommer ingen av synderna hos mer än en av dem.

a. På hur många sätt kan synderna vara fördelade?

b. Hur många fördelningar är möjliga om ingen hemfaller åt både girighet och lättja?

2. På hur många sätt kan 7 kulor fördelas på 4 lådor i följande fall?

a. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma.

b. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma.

c. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma.

d. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma.

e. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får vara tomma.

f. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får inte vara tomma.

3*. Finns det andra sätt (än 1,2,3,4,5,6 på båda) att fördela ögonen på två tärningar, så att sannolikheten för varje totalt antal ögon blir samma som för vanliga tärningar (dvs det skall gå att få totalt 4 på 3 sätt, att få totalt 11 på 2 sätt osv)? Om det går, beskriv alla möjligheter.

Tärningarna skall ha normal kubisk form, inte vara viktade och antalet ögon på varje sida skall vara ett positivt heltal.

Övning 9, to 17 oktober

1. I en radhuslänga med sex hus (med nr, i ordning, 1–6) bor sex gifta par (vart och ett bestående av en kvinna och en man), ett par i varje hus.

Var och en av kvinnorna har också (precis) en bror bland de sex männen och omvänt. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror.

Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (han bor i det ena gavelhuset, nr 1, och hans frus bror är hans systers man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus (förstås) och två svågrar.

a. I vilket hus bor Anders syster Anna?

b. I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor.

Övning 10, ti 5 november

1. Det går att fylla i vidstående tabell så att den blir multiplikationstabellen för en grupp, dess grupptabell. Gör det.

a. Är gruppen abelsk?

b. Vilket element är identitetsselement?

c. Bestäm inverser till alla element.

d. Bestäm ordningen för alla element och alla cykliska delgrupper till gruppen.

e. Beräkna $a * b * c * d * f * g$. (Behövs här inga parenteser?)

2. Låt G vara en grupp med identitetsselementet 1 och $a, b, c \in G$.

a. Givet att $x \in G$ uppfyller $\begin{cases} ax^2 = b \\ x^3 = 1, \end{cases}$ vad är x ?

b. Givet att $x \in G$ uppfyller $\begin{cases} (xax)^3 = bx \\ x^2a = (xa)^{-1}, \end{cases}$ vad är x ?

c. Visa $bac = a^{-1} \Rightarrow cab = a^{-1}$.

d. Visa $(abc)^{-1} = abc \Rightarrow (bca)^{-1} = bca$.

e. Visa att $a^3 = 1 \Rightarrow a$ har en kvadratrots, dvs för ett $r \in G$ gäller $a = r^2$.

f. Visa att $b^2ab = a^{-1} \Rightarrow a$ har en kubikrot, dvs för ett $s \in G$ gäller $a = s^3$.

*	a	b	c	d	f	g
a			c			
b					d	c
c		f		g		
d				a		b
f		c	d			
g					a	

Blandade exempel (för den roade) (en del av dem är svåra)

Till dessa kommer det inte att läggas ut lösningar på kurssidans, men den som vill är välkommen att komma och diskutera dem med läraren.

1**. Visa för fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ att $sgd(F_m, F_n) = F_{sgd(m,n)}$.

2**. Två fyrar blinkar med intervall α respektive β (minuter). α och β är irrationella tal sådana att $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (dvs i medeltal kommer ett blink per minut). Visa att om de båda blinkar vid tiden $t = 0$ kommer det under "heltalsminuten" mellan $n - 1$ och n precis ett blink, för alla heltal $n > 1$.

3**. Vilka siffror är de 100:e decimalerna i $(\sqrt{2} + 1)^{1000}$ respektive $(\sqrt{2} + 1)^{1001}$?

4**. På en föreläsning visades att om man utgår från 6 punkter och mellan varje par av dem drar antingen en röd eller en blå linje, uppstår minst en enfärgad triangel.

a. Visa att det i själva verket blir minst två enfärgade trianglar.

b. Visa att om man i stället utgår från 10 punkter och gör på samma sätt, uppstår antingen en helt röd triangel eller en helt blå "tetraeder" (dvs fyra punkter som alla parvis är förbundna med blå linjer).

c. Visa att det i b räcker med 9 punkter.

5**. Av en cirkulär tårta, med (choklad)brun ovansida och (tårtbottens)vit undersida, skärs bitar med medelpunktsvinkel x intill varandra. Då en bit skurits, vänds den genast upp och ner och läggs in på sin gamla plats (där den på magiskt vis växer fast igen). Detta upprepas runt, runt tårtan.

Låt $nx < 2\pi < (n + 1)x$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Efter $k \leq n$ vändningar är tårtans ovansida alltså vit på en sektor med vinkel kx , resten brun. Efter $n + 1$ vändningar är den vit, bortsett från en mindre brun sektor (som vänts två gånger).

a. Kommer tårtan(s ovansida) någonsin att bli helt vit? I så fall, efter hur många vändningar?

b. Kommer tårtan(s ovansida) någonsin att bli helt brun igen? I så fall, efter hur många vändningar?

6.** Givet fyra linjer i planet, inga två parallella och inga tre genom samma punkt.

Längs varje linje kryper en lus, var och en med sin konstanta hastighet. Visa att om två löss möts (utan att stanna upp) vid fem av linjernas skärningspunkter, så möts också två löss vid den sjätte skärningspunkten.

7.** I en population med speciella (matematiska) kameleonter finns vid ett tillfälle 116 röda, 97 gula och 84 blå individer.

När två olikfärgade av dessa kameleonter möts, byter de båda färg till den tredje färgen. Kan färgförändringarna upphöra, dvs kan det hända att alla kameleonerna till sist får samma färg?

8.** 100 personer (alla med olika namn) får ett märkligt erbjudande.

I ett rum står, får de veta, 100 lådor, numrerade från 1 till 100. Var och en av personerna får skriva sitt namn på en lapp och de hundra lapparna fördelas slumpmässigt i lådorna, en i varje låda.

Varje person skall sedan gå in i rummet och läsa namnet i en av lådorna. Om det inte är hans eget namn får han försöka en annan låda osv. Om han finner sitt eget namn genom att titta på högst 50 av dem, har han lyckats och skall lämna rummet precis som han fann det (och inte kommunicera med de andra) och nästa person komma in och försöka.

Om de **alla** lyckas, dvs finner lappen med sitt eget namn får de säckvis med guldpengar att dela på, annars (om en enda av dem misslyckas) får de ingenting.

a. Vad är sannolikheten att de skall få pengarna om de inte heller får ha kontakt innan de går in (och saknar andra ledtrådar, typ röntgenblick)?

b. Visa att de om de i förväg får bestämma en gemensam strategi kan öka sannolikheten att de skall få pengarna till över 30%(!).

9.** 100 personer har biljett till varsin av de 100 platserna i en biosalong. Den som går in först har dock tappat sin biljett och sätter sig på en slumpmässigt (likafördelat) vald plats. Var och en av de övriga sätter sig på sin egen plats om den är ledig, annars på en lika slumpmässigt vald (ledig) plats.

Vad är sannolikheten att den som kommer in sist hamnar på sin egen plats?

Att den k :e personen från slutet hamnar rätt?

10.** Tre personer får veta att de samtidigt skall få varsin hatt på huvudet, var och en med sannolikhet $\frac{1}{2}$ en röd och sannolikhet $\frac{1}{2}$ en blå hatt, de olika hattarnas färger oberoende. De kan se de två andras hattar, men inte sin egen. De ges chansen att gissa färgen på sin egen hatt, men kan avstå från att gissa om de vill. Om (och endast om) minst en gissar rätt färg på sin egen hatt och ingen gissar fel, får de (alla) ett pris. De får inte veta om eller vad de övriga gissar.

Hur stor sannolikhet att vinna kan de få, om de i förväg kan komma överens om en strategi för gissandet? Om de t.ex. bestämmer att A skall gissa "röd" och att B och C skall avstå, har de tydligen sannolikheten $\frac{1}{2}$ att vinna, men kan de öka sannolikheten?

Hur stor sannolikhet kan en bra strategi ge om de är femton personer?