

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 6, to 21 september

1. $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot) = (\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$ är **inte** cyklisk, ty $o(1)=1$, $o(3)=o(5)=o(7)=2$,
 $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot) = (\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}, \cdot) = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$ är cyklisk.

2. Man finner ordningarna:
$$\begin{array}{c|cccccccccccc} \pi & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline o(\pi) & 1 & 12 & 3 & 6 & 4 & 12 & 12 & 4 & 3 & 6 & 12 & 2 \end{array},$$

så generatorerna (elementen med $o(g) = |G|$) är 2, 6, 7, 11.

(Vi kommer snart att se att för en grupp av ordning 12 är alla element g med $g^4, g^6 \neq 1$ generatorer. Det förenklar sökandet.)

- 3a. $(g_1, g_2)^k = (1, 1)$ omm $m_{1,2} \mid k$, så $o((g_1, g_2)) = \text{mgm}(o(g_1), o(g_2))$.

b. $\mathbb{Z}_{mn}$ är cyklisk (ty $o(1) = mn$) och isomorf med $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm det finns $g \in \mathbb{Z}_m$, $h \in \mathbb{Z}_n$ med $\text{mgm}(o(g), o(h)) = mn$, dvs omm $\text{mgm}(m, n) = mn$ (ty $o(g) \mid m$, $o(h) \mid n$, $o(1) = m$ resp. n), dvs $\text{sgd}(m, n) = 1$.

c. Ja, $\phi((g_1, g_2)) = (g_2, g_1)$ är en isomorfi.

d. Ja, verifiera att $H_1 \times H_2$ är $\neq \emptyset$, sluten under $\circ$ och $^{-1}$.

4. $39, 40 \mid |G|$, så $m = 39 \cdot 40 = 1560$. G kan vara $(\mathbb{Z}_{1560}, +)$.

5. a vore identitets-elementet, så $o(b)$ vore 2. Omöjligt, ty $|G|$ är udda.

6a. Rotationsaxlar och speglingsplan nedan går genom tetraederns tyngdpunkt.

Typ	Antal	Paritet	Exempel	Stel avbildning av rummet
$[1^4]$	1	jämn	$id = (1)$	identitetsavbildningen
$[1^2 2]$	6	udda	$(1\ 2)$	spegling i ett plan innehållande kanten 34
$[2^2]$	3	jämna	$(1\ 2)(3\ 4)$	rotation π kring en axel genom 12:s och 34:s mittpunkter
$[13]$	8	jämna	$(1\ 2\ 3)$	rotation $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring en axel genom 4
$[4]$	6	udda	$(1\ 2\ 3\ 4)$	rotation $\pm \frac{\pi}{2}$ kring en axel genom 13:s och 24:s mittpunkter, följt av en spegling i ett plan vinkelrätt mot axeln

b. Jämna permutationer svarar mot rotationer, udda mot avbildningar som innehåller (ett udda antal) speglingar.

c. N är (ändlig och) sluten under gruppoperationen, alltså en delgrupp.

$$(1\ 2)N = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\} = N(1\ 2)$$

$$(1\ 3)N = \{(1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\} = N(1\ 3)$$

$$(1\ 4)N = \{(1\ 4), (2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2)\} = N(1\ 4)$$

$$(1\ 2\ 3)N = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\} = N(1\ 2\ 3)$$

$$(1\ 3\ 2)N = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4)\} = N(1\ 3\ 2)$$

Alla vänstersidoklasser är alltså högersidoklasser (också N själv, förstås), så N är en normal delgrupp.

(Att N är normal följer också av att $gNg^{-1} = \{gng^{-1} \mid n \in N\}$ och N består av hela konjugatklasser ($[1^4]$ och $[2^2]$) av element i G .)

Eftersom operationen i kvotgruppen G/N ges av $(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$ och varje sidoklass innehåller precis en permutation π med $\pi(4) = 4$, är G/N isomorf med gruppen av dem, så med S_3 , $G/N \cong S_3$.