

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 12, fr 18 november

1. $|G| = |G_x| \cdot |Gx|$ om G verkar på en mängd X , där $x \in X$.

Då x är ett hörn fås $|G_x| = 4$ (fyra rotationer kring en axel genom oktaederns mittpunkt och hörnet) och $|Gx| = 6$ (hörnet kan rotera till alla oktaederns hörn).

Om x är mittpunkten av en sidoyta fås på liknande sätt $|G_x| = 3$, $|Gx| = 8$.
I båda fallen blir $|G| = 24$.

2. Vi använder Burnsidess lemma.

Brickans grupp av symmetrirotationer har i a. 8 element (kvadratens symmetrigrupp; $|G_x| = 2$, $|Gx| = 4$ för alla hörn x): identitets-elementet (bevarar alla konfigurationer, $|F(id)| = 3^4$), två rotationer $\pm \frac{\pi}{2}$ kring axeln vinkelrätt mot brickan genom dess mittpunkt (bevarar konfigurationer med samma färg på alla kulor, $|F(g)| = 3$), en rotation π kring samma axel (bevarar alla konfigurationer med kulorna parvis likfärgade, $|F(g)| = 3^2$), två rotationer π kring diagonalerna (bevarar konfigurationer med samma färg på två av kulorna, $|F(g)| = 3^3$) och två rotationer π kring axlar genom mittpunkten och parallella med två kanter (bevarar konfigurationer med kulorna parvis likfärgade, $|F(g)| = 3^2$). I b. är det bara 4 element i symmetrigruppen (de som inte vänder brickan).

Lemmat ger antalet väsentligt olika färgningar, $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$, dvs i a. $\frac{1}{8}(3^4 + 2 \cdot 3 + 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2) = \frac{1}{8}3(27 + 2 + 3 + 18 + 6) = 21$ och i b. $\frac{1}{4}(3^4 + 2 \cdot 3 + 3^2) = \frac{1}{4}3(27 + 2 + 3) = 24$. Svaren i c. fås genom att byta 3 mot k i a. och b., $\frac{1}{8}(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k)$ och $\frac{1}{4}(k^4 + k^2 + 2k)$.

3. Burnsidess lemma. (Den regelbundna) tetraederns grupp av symmetrirotationer har 12 element: Identitets-elementet (bevarar alla konfigurationer, $|F(id)| = k^6$), åtta rotationer $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring axlar genom ett hörn och mittpunkten av motstående sidoyta (bevarar konfigurationer med samma färg på kanterna vid hörnet och samma på kanterna vid sidoytan, $|F(g)| = k^2$) och tre rotationer π kring axlar genom mittpunkterna av motstående kanter (bevarar konfigurationer med övriga fyra kanter parvis likfärgade, $|F(g)| = k^4$).

Lemmat ger antalet väsentligt olika färgningar, $\frac{1}{12}(k^6 + 3k^4 + 8k^2)$.