

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 10, to 3 november

1. $ac = c = 1c$, så a är identitets-elementet.

Det ger första raden och första kolumnen.

Sedan används att tabellen är en latinsk kvadrat (dvs varje element finns precis en gång i varje rad och kolumn). Tabellen blir:

a. Nej b. a

c. $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$, $d^{-1} = d$,

$f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$

d. a 's ordning är $o(a) = 1$, a genererar den cykliska delgruppen $\langle a \rangle = \{a\}$,

$o(b) = 2$, $\langle b \rangle = \{a, b\}$, $o(c) = 2$, $\langle c \rangle = \{a, c\}$, $o(d) = 2$, $\langle d \rangle = \{a, d\}$,

$o(f) = o(g) = 3$, $\langle f \rangle = \langle g \rangle = \{a, f, g\}$ e. c

$*$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

2a. $ax^2 = b$ ger $ax^3 = bx$, så (med $x^3 = 1$) $a = bx$ och $x = b^{-1}a$

b. $bx = (xax)^3 = xax^2ax^2ax = xa(xa)^{-1}(xa)^{-1}x = (xa)^{-1}x$

(ty $x^2a = (xa)^{-1}$), så $b = (xa)^{-1}$ och $xa = b^{-1}$ och $x = b^{-1}a^{-1} (= (ab)^{-1})$.

c. $bac = a^{-1}$ ger $baca = 1$, så $aca = b^{-1}$, $acab = 1$, $cab = a^{-1}$.

d. $(abc)^{-1} = abc$ ger $abcabc = 1$, så $bcabc = a^{-1}$, $bcabca = 1$, $(bca)^{-1} = bca$.

e. $a^3 = 1$ ger $a = 1a = a^3a = (a^2)^2$.

f. $b^2ab = a^{-1}$ ger $ba = b^{-1}a^{-1}b^{-1}$, så $(ba)^3 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}baba = 1a = a$.

(Alt. $b^2ab = a^{-1}$ ger $b^2aba = 1$, så $babab = b^{-1}b^2abab = 1$ och $(ba)^3 = a$.)

3. $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot) = (\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$ är **inte** cyklisk, ty $o(1) = 1$, $o(3) = o(5) = o(7) = 2$,
 $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot) = (\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}, \cdot) = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$ är cyklisk.

4. Man finner ordningarna:

π	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$o(\pi)$	1	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2

,

så generatorerna (elementen med $o(g) = |G|$) är 2, 6, 7, 11.

(Vi kommer snart att se att för en grupp av ordning 12 är alla element g med $g^4, g^6 \neq 1$ generatorer. Det förenklar sökandet.)

5a. $(g_1, g_2)^k = (1, 1)$ omm $m_{1,2} \mid k$, så $o((g_1, g_2)) = \text{mgm}(o(g_1), o(g_2))$.

b. $\mathbb{Z}_{mn}$ är cyklisk (ty $o(1) = mn$) och isomorf med $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm det finns $g \in \mathbb{Z}_m$, $h \in \mathbb{Z}_n$ med $\text{mgm}(o(g), o(h)) = mn$, dvs omm $\text{mgm}(m, n) = mn$ (ty $o(g) \mid m$, $o(h) \mid n$, $o(1) = m$ resp. n), dvs $\text{sgd}(m, n) = 1$.

c. Ja, $\phi((g_1, g_2)) = (g_2, g_1)$ är en isomorfi.

d. Ja, verifiera att $H_1 \times H_2$ är $\neq \emptyset$, sluten under $\circ$ och $^{-1}$.