

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 6, ti 20 september

1a. Ingendera, b. bara injektiv, c. bara surjektiv, d. alla fyra.

2. Man finner värdena:

a.	$\begin{array}{c cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline x^3 + 3x + 7 & 7 & 2 & 3 & 7 & 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \end{array}$	så detta f har ingen av egenskaperna.
b.	$\begin{array}{c cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline x^3 + 4x + 5 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}$	så detta f har alla fyra egenskaperna.
c.	$\begin{array}{c cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline x^3 + 5x + 4 & 4 & 1 & 4 & 1 & 7 & 1 & 7 & 4 & 7 \end{array}$	så detta f har ingen av egenskaperna.

3. f måste vara en injektion (annars kan inte gf vara det) och g måste p.s.s. vara en surjektion.

Minsta exemplet: $|X| = |Z| = 1$, $|Y| = 2$, f, g godtyckliga funktioner.

Med mängderna lika: $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = \max(x - 1, 0)$.

4a. Nej, ty eftersom $\mathbb{Q}$ är uppräknelig och $\mathbb{R}$ är överuppräknelig finns ingen injektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ (och ingen surjektion $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$),

b. ja, t.ex. $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5*. En bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ ges av $f(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = 1\}$, där $\sum_{i=0}^{\infty} r_i 2^i$ är den binära utvecklingen av n , så $r_i = 0$ utom för ändligt många i .

6*. Ingen. Varje boll har ju tagits ur och kastats bort.

7. $2646000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, så (multiplikationsprincipen) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ st olika positiva delare.

8. På $13! - 2 \cdot 13 \cdot 11! = 13 \cdot 10 \cdot 11! (= 5\,189\,184\,000)$ sätt.

9*. Summan är fibonaccitalet F_{n+1} . Visas med induktion över n (nog enklast genom att notera att summan kan skrivas $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n-k}{k}$ och visa att den uppfyller samma rekursionsekvationer som F_{n+1}).

Man kan också se det genom att tolka F_{n+1} som antalet sätt att lägga en $2 \times n$ -trädgårdsgång med 2×1 -plattor. $\binom{n-k}{k}$ är antalet sätt att välja ut vilka $2k$ stenar som skall ligga på längden.

10. Låt $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $\dots$, $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Enligt postfacksprincipen är antingen något av s_i :na $0 \pmod{n}$ eller två av dem lika $\pmod{n}$.

11*. Betrakta följderna $\{(F_i, F_{i+1}) \pmod{k}\}_{i=1}^{k^2+1}$. Varje term bestämmer både den föregående och den följande entydigt. Eftersom någon term upprepas (postfacksprincipen), gör också den första det, $(F_{n+1}, F_{n+2}) \equiv (1, 1) \pmod{k}$ för något n , $1 \leq n \leq k^2$. Då är $F_n \equiv 0 \pmod{k}$.