

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 4, ti 13 september

1. Med Euklides algoritim fås $\text{sgd}(21, 1638) = 1$ och $\text{mgm}(21, 1638) = 185094$.
2. $\text{sgd}(3k+2, 5k+3) = \text{sgd}(3k+2, 2k+1) = \dots = 1$.
3. Med x 1-kronor, y 5-kronor och z 10-kronor fås $x + 5y + 10z = 75$ och $x + y + z = 16$, så $4y + 9z = 59$. Den ekvationen har bara en lösning med y, z icke-negativa heltal. Motsvarande x blir också icke-negativt. Emma har 5 st 1-kronor, 8 st 5-kronor, 3 st 10-kronor.
4. Om $10 \mid n^2$ ingår 2 och 5 i primfaktoriseringen av n^2 och därför också i den av n , så $10 \mid n$. För att $9 \mid n^2$ räcker att $3 \mid n$, t.ex. $9 \mid 3^2$, men $9 \nmid 3$. Så svar: ja, nej.
5. Eftersom $n^5 - n = (n^2 + 1)(n + 1)n(n - 1)$ gäller $2 \mid n^5 - n$ (en av n och $n + 1$ är jämn) och $3 \mid n^5 - n$ (en av $n - 1, n$ och $n + 1$ är delbar med 3), så $6 \mid n^5 - n$. (Alt, med modulär aritmetik, $n^5 \equiv_6 n$, ty för $n \equiv_6 0, \dots, 5$ fås $n^5 - n \equiv_6 0$.) Således $6 \mid n^5 - n + 6n = n^5 + 5n$.
- 6*. Vi använder induktion över n , så vi antar att påståendet är sant för alla $m \in \mathbb{N}$ med $m < n$ och skall visa det för n .
Fall 1: n jämnt. Om $n = 0$ är påståendet sant (med den tomma summan).
Annars är $n > \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ och en summa av sökt typ finns för $\frac{n}{2}$ (enligt induktionsantagandet). Den ger en för n (med termer 2-dubbel för $\frac{n}{2}$).
Fall 2: n udda. Tag $k \in \mathbb{N}$ med $3^k \leq n < 3^{k+1}$ och skriv $n = 2 \cdot a + 3^k$. Då är $a < 3^k \leq n$, så a kan skrivas som en summa av önskad typ (antagandet) och 3^k delar inte 2-någon av dess termer. Det ger den önskade summan för n .
Saken är klar.
En sådan summa är inte unik för alla $n \in \mathbb{N}$. (T.ex. är $11 = 8 + 3 = 2 + 9$.)