

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 3, to 8 september

1. Enligt Eulers polyederformel är (med gängse beteckningar) $v - e + r = 2$ och dessutom gäller $4v = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2e = 2 \cdot 16$, så antalet ytor $r = 2 - v + e = 2 - 8 + 16 = 10$.

2. 12 hörn och 11 ytor ger (Euler) $e = 12 + 11 - 2 = 21$ kanter. Låt det finnas x hörn med valens 3 (så $12 - x$ hörn med valens 5). Då fås $3x + 5(12 - x) = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2e = 42$, så $x = 9$. Alltså 9 hörn med valens 3 och 3 hörn med valens 5.

3. Låt x, y vara antalen ytor med 4 respektive 6 kanter. Då gäller $v - e + (x + y) = 2$ och $3v = 2e = 4x + 6y$. De ger $x = 6$ (medan v, e och y inte bestäms entydigt). Det finns alltså 6 ytor med 4 kanter.

4. Om man i Petersens graf tar bort hörn a och dess kanter och suddar ut b, e, f (och gör deras två kanter till en) är den uppkomna grafen bipartit, med hörnmängder $X = \{c, i, j\}$ och $Y = \{d, g, h\}$. Alla hörn i X är grannar med alla i Y , så grafen är isomorf med $K_{3,3}$. Kuratowskis sats ger att Petersens graf inte är planär.

Om man kontraherar kanterna af, bg, ch, di, ej fås en graf som är isomorf med K_5 . Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär.

Eftersom suddandet av ett hörn kan uppfattas som en kontraktion av en kant, kan samma konstruktion som för Kuratowskis sats ovan också användas för att visa att Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär. Däremot kan man inte få K_5 för Kuratowskis sats (eftersom operationerna där inte kan öka valensen för ett hörn).

I Wikipedias artikel "Planar graph" finns en animation som visar hur $K_{3,3}$ är en minor till Petersens graf.

5. Det gäller att visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med tentander och uppgifter som hörn och kanter precis då tentanden klarat uppgiften. Tag en delmängd A till tentanderna. Om $A \neq \emptyset$ är $|J(A)| \geq 4$ (varje tentand klarade minst 4 uppgifter) och om $|A| > 4$ är $|J(A)| = 10$ (varje uppgift klarades av minst 6 tentander, så någon i A). Halls sats ger resultatet (eftersom $|A| \leq 10$).

6*. Induktion över $|V|$, så antag att påståendet är sant för alla grafer med färre hörn än $|V|$.

Om $V = \emptyset$ är $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1} = 0$ och påståendet sant.

Om $V \neq \emptyset$, låt $v_0 \in V$ ha minimal valens, så $\delta(v_0) \leq \delta(v)$ för alla $v \in V$. Med $V_0 = \{v_0 \text{ med alla grannar}\}$ är $\sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq (\delta(v_0) + 1) \cdot \frac{1}{\delta(v_0)+1} = 1$ (ty $|V_0| = \delta(v_0) + 1$ och $0 \leq \delta(v_0) \leq \delta(v) \Rightarrow \frac{1}{\delta(v_0)+1} \geq \frac{1}{\delta(v)+1}$). För alla $v \in V' = V \setminus V_0$ gäller då $\delta(v) \geq \delta'(v)$ (antalet grannar i V' till v), så $\sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1}$. Enligt induktionsantagandet finns minst så många oberoende hörn i V' . $M = \{\text{dessa och } v_0\}$ är en mängd oberoende hörn i V och $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1} = \sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq 1 + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1} \leq |M|$. **Saken är klar (induktion).**