

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 2, on 7 september

1. En möjlighet är dessa grafer.

a.



b.



c.



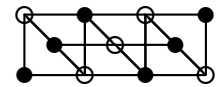
d.



2a. Om rutorna är omväxlande svarta och vita som på ett vanligt schackbräde, leder varje drag från svart till vit eller från vit till svart. Eftersom springaren skall återkomma till starttrutan måste det finnas lika många svarta som vita rutor (om den gör minst ett drag), dvs totalt ett jämnt antal.

b. Antag att det finnes en sådan sluten väg (dvs en hamiltoncykel). Färga nu rutorna i rad 1 och 4 röda och de i rad 2 och 3 blå. Då kan springaren aldrig gå från röd till röd och eftersom brädet har lika många av varje färg, måste varannan ruta den besöker vara blå och varannan röd. Men detsamma gäller för de svarta och vita rutorna i den vanliga färgningen (som i a.). Det betyder att alla röda rutor vore vita eller alla svarta. Motsägelse.

3. Enligt figuren är grafen bipartit. Eftersom den har ett udda antal hörn kan den inte ha någon hamiltoncykel (en sådan måste ha vartannat svart och vitt hörn, dvs lika många av vardera), så **svaret är nej**.



4. Om grafen $G = (V, E)$ är osammanhängande, finns disjunkta $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ med $V = V_1 \cup V_2$ och inga kanter mellan dem. Om $x \in V_1, y \in V_2$, gäller $\delta(x) \leq |V_1| - 1, \delta(y) \leq |V_2| - 1$, så $\delta(x) + \delta(y) \leq |V_1| + |V_2| - 2 = n - 2$.

5. Om hörnen x, y ligger i olika komponenter i G , är xy en väg i $\bar{G}$. Om de ligger i samma komponent och z ligger i en annan, är xzy en väg i $\bar{G}$.

6. Betrakta alla färgningar av hörnen i G med två färger. Bland dem finns en med det minsta antalet "kollisioner" (dvs enfärgade kanter). En sådan färgning löser problemet, ty om ett hörn hade samma färg som mer än hälften av sina grannar, skulle det bli färre kollisioner om det bytte färg.

7*. G har ett jämnt antal udda hörn ("handslagslemmat"). Låt G' vara G med ett nytt hörn som är granne med alla G 's udda hörn. G' 's alla hörn är jämna, så enligt Euler har varje komponent i G' en eulerkrets. Varje val av en riktning för var och en av dessa kretsar ger en riktning av G med den sökta egenskapen (varje hörn v i G' har $\delta^-(v) = \delta^+(v)$ och till vart och ett av G 's hörn har högst en kant lagts).