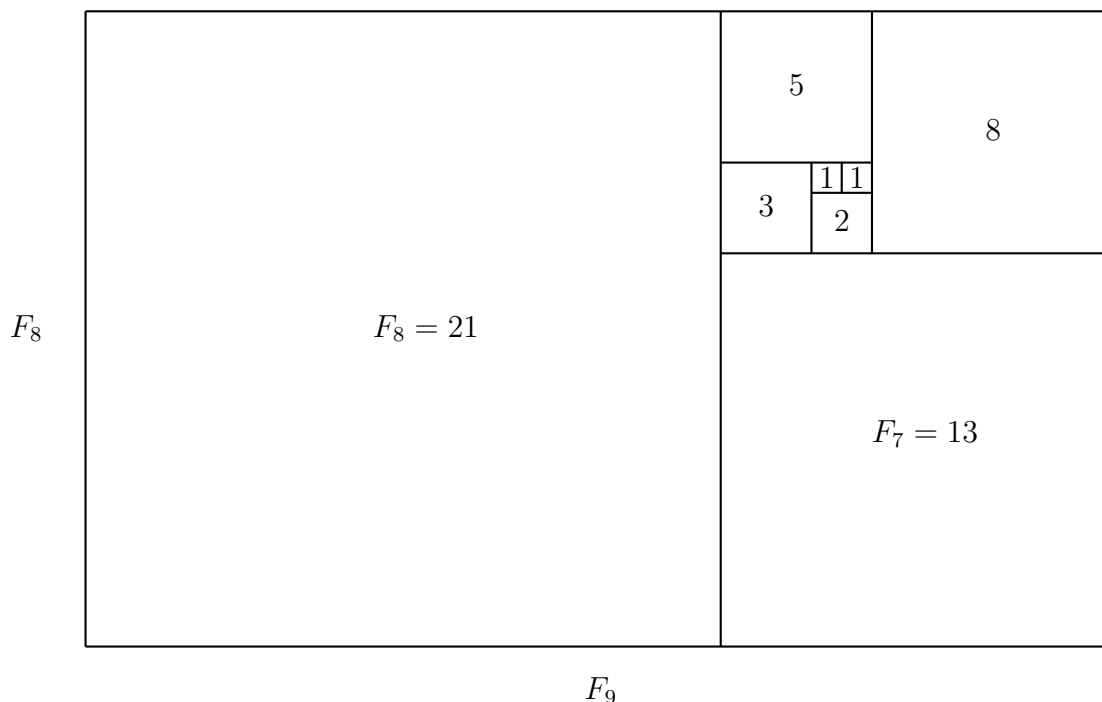


Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 1, to 1 september

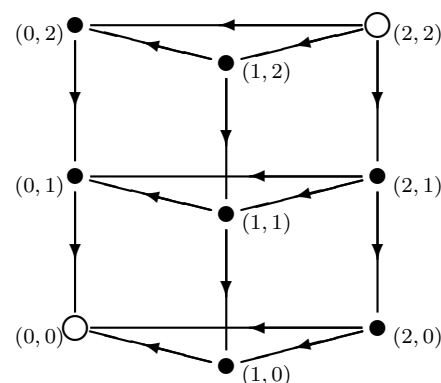
1. Båda sambanden visas med induktion (motsvarande den rekursiva definitionen av F_n). Det första resultatet åskådliggörs av figuren, som illustrerar hur en rektangel med sidor F_n och F_{n+1} kan delas upp i kvadrater med sidorna $F_1, F_2, \dots, F_n$:



2. Låt hörnen i grafen svara mot fördelningen av familjemedlemmar mellan stränderna, i figuren beskrivna som (b, v) , där b är antalet barn och v antalet vuxna på den första stranden (så $2 - b$ barn och $2 - v$ vuxna på den andra).

De riktade kanterna (pilarna) visar vilka fördelningar man kan komma mellan med en överfart från den första stranden till den andra. Då man far från den andra till den första stranden går man i grafen alltså mot pilarna.

Uppgiften är att ta sig från hörnet $(2, 2)$ (alla på första stranden) till hörn $(0, 0)$ (alla på den andra) genom att gå med, mot, med, etc. pilar.

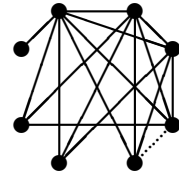


Om man undviker överfarter där man genast vänder om finns bara en möjlighet: $(2, 2) \rightarrow (0, 2) \leftarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1) \leftarrow (2, 1) \rightarrow (0, 1) \leftarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \leftarrow (2, 0) \rightarrow (0, 0)$.

Så (den väsentligen unika) lösningen blir: 2 barn fram, 1 barn åter, 1 vuxen fram, 1 barn åter, 2 barn fram, 1 barn åter, 1 vuxen fram, 1 barn åter, 2 barn fram.

Se t.ex. på Wikipedia under "Propositiones ad Acuendos Juvenes" om detta problems historia (från ca år 800).

3. Låt hörnens valenser vara $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x$. Summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal, så x är udda och ≤ 7 . $x = 1$ är omöjligt, ty hörnen med valenser 6,7 medför att det går minst 3 kanter till varje par av hörn. $x = 7$ är också omöjligt, ty två hörn med valens 7 skulle innebära att alla hörn hade valens minst 2. $x = 3, 5$ går båda, se fig. (utan och med den prickade kanten). Ett sätt att finna dessa är att notera att en graf med valenser $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x$ finns omm en med valenser $0, 2, 2, 3, 4, 5, x - 1$ finns omm en med $1, 1, 2, 3, x - 2$ finns omm en med $1, 2, 2, x - 2$ finns etc.



4. Följer av att $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

5. Eftersom $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot 28 = 56$ och alla $\delta(v) \geq 3$, måste $|V| \leq 18$. En graf med 18 hörn och 28 kanter ges av två kopior av kubgrafen med två disjunkta kanter mittpunkter "hopsnörda" till ett nytt hörn. Svaret är alltså 18.