Matematik, KTH **Diskret matematik för D3, ht 2013**
B.Ek

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 8, to 10 oktober

1a. $4! \cdot S(7,4) = 24 \cdot 350 = 8400$ b. $4! \cdot S(7,4) - 4! \cdot S(6,4) = 6840$

2a. $4^7 = 16384$ b. $4! \cdot S(7,4) = 8400$ c. $\binom{7+4-1}{7} = 120$ d. $\binom{3+4-1}{3} = 20$
e. $S(7,1)+S(7,2)+S(7,3)+S(7,4) = 1+63+301+350 = 715$ f. $S(7,4) = 350$
[g. $p_1(7) + p_2(7) + p_3(7) + p_4(7) = 1 + 3 + 4 + 3 = 11$
h. $p_4(7) = 3$
(där $p_k(n)$ är antalet partitioner av heltalet n i precis k delar)]

3*. Genererande funktioner. Om $a_1, a_2, \ldots$ och $b_1, b_2, \ldots$ är antalen sidor med $1, 2, \ldots$ ögon på de två tärningarna och polynomen $f(x)$, $g(x)$ ges av $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$ gäller (varför?) $f(x)g(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^5)^2 = \frac{1}{(x-1)^2}(x^6 - 1)^2 = \frac{(x^3+1)^2(x^3-1)^2}{(x-1)^2} = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2$. Dessa faktorer kan inte faktoriseras mer som reella polynom, så (entydig faktorisering och alla a_n, b_n är naturliga tal) $f(x)$ och $g(x)$ skall ”dela på” de sex faktorerna. Eftersom $f(1) = g(1) = 6$ måste båda innehålla $(x+1)(x^2+x+1)$, så den enda möjligheten att få ”ovanliga” tärningar är med $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)$, $g(x) = (x+1)(x^2+x+1)$ (eller tvärtom), dvs $f(x) = x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$, $g(x) = x^3+2x^2+2x+1$. Alla koefficienter är här naturliga tal (inga är negativa), så det finns precis en möjlighet till ovanliga tärningar med den önskade egenskapen. Den ena tärningen skall ha 1, 3, 4, 5, 6, 8 ögon på sidorna och den andra 1, 2, 2, 3, 3, 4.