Matematik, KTH **Diskret matematik för D3, ht 2013**
B.Ek

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 6, to 26 september

1. f måste vara en injektion (annars kan inte gf vara det) och g måste p.s.s. vara en surjektion.
Minsta exemplet: $|X| = |Z| = 1,\ |Y| = 2,\ f, g$ godtyckliga funktioner.
Med mängderna lika: $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1, g(x) = max(x - 1, 0)$.

2*. En bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ ges av $f(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = 1\}$, där $\sum_{i=0}^{\infty} r_i 2^i$ är den binära utvecklingen av n, så $r_i = 0$ utom för ändligt många i.

3. $2646000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, så (multiplikationsprincipen) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ st olika positiva delare.

4. På $13! - 2 \cdot 13 \cdot 11! = 13 \cdot 10 \cdot 11! (= 5189184000)$ sätt.

5*. Summan är fibonaccitalet F_{n+1}. Visas med induktion över n (nog enklast genom att notera att summan kan skrivas $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n-k}{k}$ och visa att den uppfyller samma rekursionsekvationer som F_{n+1}).
Man kan också se det genom att tolka F_{n+1} som antalet sätt att lägga en $2 \times n$-trädgårdsgång med 2×1-plattor. $\binom{n-k}{k}$ är antalet sätt att välja ut vilka $2k$ stenar som skall ligga på längden.

6. Låt $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Enligt postfacksprincipen är antingen något av s_i:na $0 \pmod n$ eller två av dem lika $\pmod n$.

7*. Betrakta följden $\{(F_i, F_{i+1}) \pmod k\}_{i=1}^{k^2+1}$. Varje term bestämmer både den föregående och den följande entydigt. Eftersom någon term upprepas (postfacksprincipen), gör också den första det, $(F_{n+1}, F_{n+2}) \equiv (1, 1) \pmod k$ för något n, $1 \le n \le k^2$. Då är $F_n \equiv 0 \pmod k$.