

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 5, fr 20 september

1*. Om talet $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{10}$ så gäller $n \equiv_9 (a_k + \dots + a_1 + a_0)$, n :s siffersumma, ty $10^i - 1 = (99 \dots 99)_{10}$ så $9 \mid a_i \cdot 10^i - a_i$. Summan av alla siffrorna i 2^{29} är alltså $\equiv_9 2^{29}$. Men $2^2 \equiv_9 4, 2^3 \equiv_9 8, 2^4 \equiv_9 7, 2^5 \equiv_9 5, 2^6 \equiv_9 1$, så $2^{29} = 2^{4 \cdot 6 + 5} \equiv_9 1^4 \cdot 2^5 \equiv_9 5$. Men $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45 \equiv_9 0$, så **den saknade siffran är 4** ($\equiv_9 -5$).

2. Om x, y, z löser ekvationen är $x^3 = 3(3z^3 - y^3)$, så $3 \mid x^3$ och därmed $3 \mid x$ (eftersom 3 är ett primtal). $x = 3a$ ger $9a^3 + y^3 = 3z^3$, så p.s.s. $y = 3b$ och sedan $z = 3c$, där a, b, c är heltal så att $a^3 + 3b^3 = 9c^3$. Så om x, y, z löser den givna ekvationen är de alla delbara med 3 och $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}$ löser samma ekvation. Det följer att x, y, z alla är delbara med 3^k för $k = 0, 1, 2, \dots$. Enda möjligheten är att $x = y = z = 0$. (Resonemanget kan formuleras med "infinite descent" (ekvivalent med induktion): om $s = \max(|x|, |y|, |z|) > 0$ för en lösning skulle lösningen $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}$ alltid ge ett strikt mindre s -värde. Det skulle ge en oändlig strikt avtagande följd positiva heltal. Omöjligt.)

3a. Om x är ett heltal är $x^2 \equiv_3 0$ (om $3 \mid x$) eller $\equiv_3 1$ (ty $0^2 = 0, 1^2 = 2^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_3$) och VL i $a^2 + b^2 = c^2$ måste vara $0 + 0, 0 + 1$ eller $1 + 0$ (mod 3).

b. $x^2 \equiv_5 0$ (om $5 \mid x$), $\equiv_5 1$ eller $\equiv_5 4$ (ty $0^2 = 0, 1^2 = 4^2 = 1, 2^2 = 3^2 = 4$ i $\mathbb{Z}_5$) och $a^2 + b^2 \equiv_5 c^2$ är omöjligt med $a^2, b^2, c^2 \equiv_5 1$ eller 4.

c. $x^2 \equiv_4 0$ (om x jämnt) eller $\equiv_4 1$ (om x udda), så inte båda a och b kan vara udda. Om de båda är jämna är $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ en pythagoreisk trippel, så minst en av $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ jämn. Om precis en av a, b vore jämn och den inte vore delbar med 4 vore $a^2 + b^2 \equiv_8 5$ och $c^2 \equiv_8 1$ (ty $2^2 = 6^2 = 4, 1^2 = 3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_8$).

4. Om x, y, z alla är udda blir VL udda och HL jämnt, så i en lösning är minst en av dem jämn. Då blir HL $\equiv_4 0$ och VL $\equiv_4$ antalet udda av x, y, z . De är alltså alla jämna och $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 + (\frac{z}{2})^2 = 4\frac{x}{2}\frac{y}{2}\frac{z}{2}$. Som nyss fås att $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$ alla är jämna och $\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{z}{4}$ uppfyller motsvarande ekvation med 8 i HL etc. Man får att $2^k \mid x, y, z$ för $k = 1, 2, 3, \dots$, dvs $x = y = z = 0$ är enda lösningen.