

Svar och anvisningar till de extra exemplen

Övning 6, on 26 september

1. f måste vara en injektion (annars kan inte gf vara det) och g måste p.s.s. vara en surjektion.

Minsta exemplet: $|X| = |Z| = 1$, $|Y| = 2$, f, g godtyckliga funktioner.

Med mängderna lika: $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = \max(x - 1, 0)$.

2*. En bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ ges av $f(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = 1\}$, där $\sum_{i=0}^{\infty} r_i 2^i$ är den binära utvecklingen av n , så $r_i = 0$ utom för ändligt många i .

3. $2646000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, så (multiplikationsprincipen) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ st olika positiva delare.

4. På $13! - 2 \cdot 13 \cdot 11! = 13 \cdot 10 \cdot 11!$ (= 5189184000) sätt.

5*. Summan är fibonaccitalet F_{n+1} . Visas med induktion över n (nog enklast genom att notera att summan kan skrivas $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n-k}{k}$ och visa att den uppfyller samma rekursionsekvationer som F_{n+1}).

Man kan också se det genom att tolka F_{n+1} som antalet sätt att lägga en $2 \times n$ -trädgårdsgång med 2×1 -plattor. $\binom{n-k}{k}$ är antalet sätt att välja ut vilka $2k$ stenar som skall ligga på längden.

6. Låt $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n$. Enligt postfacksprincipen är antingen något av s_i :na $0 \pmod{n}$ eller två av dem lika $\pmod{n}$.

7*. Betrakta följden $\{(F_i, F_{i+1}) \pmod{k}\}_{i=1}^{k^2+1}$. Varje term bestämmer både den föregående och den följande entydigt. Eftersom någon term upprepas (postfacksprincipen), gör också den första det, $(F_{n+1}, F_{n+2}) \equiv (1, 1) \pmod{k}$ för något n , $1 \leq n \leq k^2$. Då är $F_n \equiv 0 \pmod{k}$.