KTH Matematik

Lösningar komplettering SF1633, Differentialekvationer I, 30 november 2007

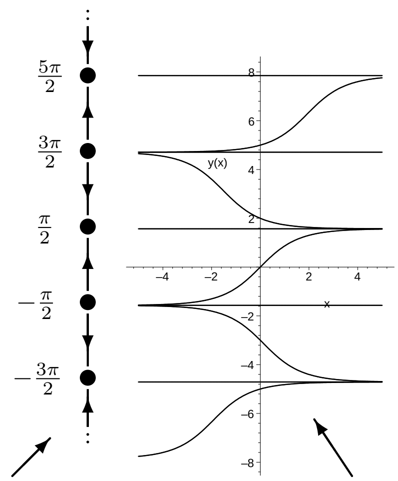
1. Skissa (det endimensionella) fasporträttet för den autonoma differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = \cos y$ och bestäm alla värden på y_0 så att $\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{2}$, då $y(x)$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos y \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

(Du behöver inte lösa ekvationen.)

Lösning: För att rita ett fasporträtt finner vi först de kritiska punkterna. De ges av $\cos y = 0$, dvs kritiska punkter är P_n,
med $y = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
y växer i de intervall mellan de kritiska punkterna där derivatan, dvs $\cos y$, är positiv och avtar där den är negativ. Porträttet blir som punkterna och pilarna här intill.
Man ser att precis om begynnelsevärdet y_0 uppfyller $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3\pi}{2}$, kommer lösningen att gå mot $\frac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$.

Svar: Fasporträtt enligt figuren till höger, lösningar går mot $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ då $\boldsymbol{x \to \infty}$ precis om $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3\pi}{2}}$.



fasporträttet   några lösningar

---

2. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2\, y'' - (4x^2 + 3x)\, y' + (4x^2 + 6x + 4)\, y = 0,\ x > 0,$$

då vi vet att $y_1(x) = x^2\, e^{2x}$ är en lösning.

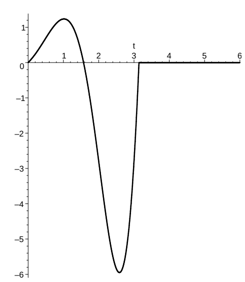
Lösning: Vi använder metoden med reduktion av ordningen och skriver lösningen som $y(x) = y_1(x)u(x) = x^2\, e^{2x}\, u(x)$ och finner $y' = x^2\, e^{2x}\, u' + (2x^2 + 2x)\, e^{2x}\, u$ och
$y'' = x^2\, e^{2x}\, u'' + (4x^2 + 4x)\, e^{2x}\, u' + (4x^2 + 8x + 2)\, e^{2x}\, u$.
Insättning i ekvationen ger $x^4\, u'' + x^3\, u' = 0$ (om man får kvar en u-term här, är antingen y_1 inte en lösning, eller så har man räknat fel och bör reagera!). Eftersom $x \neq 0$ är det detsamma som $xu'' + u' = (x\, u')' = 0$, så $x\, u' = c_1,\ u' = \frac{c_1}{x}$ och $u(x) = c_1\, \ln x + c_2$ så
Svar: Den allmänna lösningen till ekvationen är $\boldsymbol{y(x) = x^2\, e^{2x}\, (c_1\, \ln x + c_2)}$, $\boldsymbol{c_{1,2}}$ godtyckliga konstanter.

---

3. Vad är $y(5)$ om $y(t)$ är lösningen till problemet ($\delta(t)$ är Diracs deltafunktion)

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = -\,e^{\pi}\,\delta(t - \pi) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad ?$$

Lösning: Vi använder laplacetransformen och har med $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ att $\mathcal{L}\{y'\} = s\,Y - y(0) = s\,Y$ och $\mathcal{L}\{y''\} = s\,\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) = s^2 Y - 1$. Vi får (transformen verkar linjärt) att $s^2 Y - 2s\,Y + 5Y - 1 = ((s-1)^2 + 4)Y - 1 = -e^{\pi}\mathcal{L}\{\delta(t - \pi)\} = -e^{\pi}\, e^{-\pi s}$, så $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2+4} - e^{\pi}\frac{e^{-\pi s}}{(s-1)^2+4}$. Inverstransformering ger $y(t) = \frac{1}{2}e^t \sin 2t - e^{\pi}\frac{1}{2}e^{t-\pi} \sin 2(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) = (1 - \mathcal{U}(t-\pi))\frac{1}{2}e^t \sin 2t$.
$\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion.
Då $t > \pi$ är $y(t)$ identiskt 0, så
Svar: Det sökta värdet är $\boldsymbol{y(5) = 0}$.

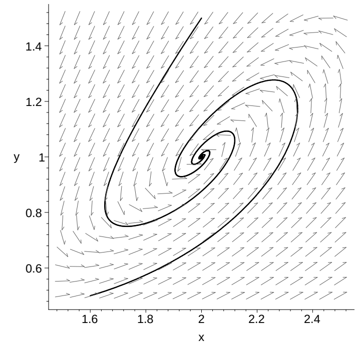


---

4. Bestäm typ och stabilitet för den kritiska punkten $(2,1)$ till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = x^2\,y - 2\,x\,y^2 \\ y' = x^2\,y^2 - 4\,y^3 \end{cases}.$$

Lösning: För att avgöra vilken typ av kritisk punkt den är, lineariserar vi kring $(2,1)$.
Jacobimatrisen för avbildningen som ges av högerleden är $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy-2y^2 & x^2-4xy \\ 2xy^2 & 2x^2y-12y^2 \end{pmatrix}$.
För $(x,y) = (2,1)$ fås $\mathbf{J}(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är rötterna till den karakteristiska ekvationen
$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -8 + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = \lambda^2 + 2\lambda + 8,$
så $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{7}$. Två icke-reella egenvärden med negativ realdel, så $(2,1)$ är en stabil spiralpunkt (vilken som namnet anger är en stabil punkt).
(Alternativt kan man förstås använda $\tau = -2,\ \Delta = 8$ etc.)



Svar: Den kritiska punkten $(2,1)$ är en stabil spiralpunkt.

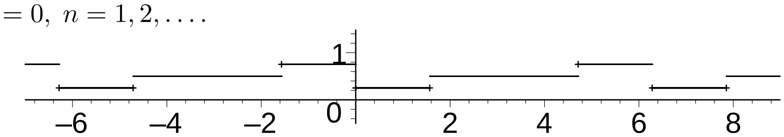
---

5. Låt den 2π-periodiska funktionen $f(x)$, som ges av att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{då } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{då } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{4} & \text{då } \frac{3\pi}{2} \le x < 2\pi \end{cases}.$$

ha fourierserien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.
Bestäm alla koefficienterna a_n och avgör också vilket värde serien konvergerar mot, då $x = \frac{25\pi}{2}$. (Du behöver inte bestämma koefficienterna b_n.)

Lösning: Funktionen $f(x) - \frac{1}{2}$ är en **udda** 2π-periodisk funktion, så dess fourierserie innehåller bara sinus-termer. Det betyder att $f(x)$ har en fourierserie: $\frac{1}{2}$ + sin-termer, så $a_0 = 1,\ a_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$.



Eftersom $f(x)$ är styckvis kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar, konvergerar serien för varje x mot $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.
f är 2π-periodisk, så $\frac{1}{2}(f(\frac{25\pi}{2}-0)+f(\frac{25\pi}{2}+0)) = \frac{1}{2}(f(\frac{25\pi}{2}-6\cdot 2\pi-0)+f(\frac{25\pi}{2}-6\cdot 2\pi+0)) = \frac{1}{2}(f(\frac{\pi}{2}-0) + f(\frac{\pi}{2}+0)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ och serien konvergerar för $x = \frac{25\pi}{2}$ mot $\frac{3}{8}$.
Svar: De sökta koefficienterna ges av $a_0 = 1,\ a_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$
för $x = \frac{25\pi}{2}$ konvergerar serien mot värdet $\frac{3}{8}$.
