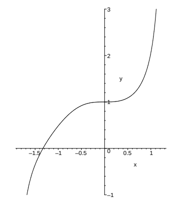
KTH Matematik

Lösningar tentamen 14 november 2006 i 5B1206, Differentialekvationer I

1. Vi söker $y(x)$ som uppfyller $y' = x^2 + x^2y^2$ och $y(0) = 1$.
Ekvationen är separabel, den kan skrivas $\frac{y'}{1+y^2} = x^2$. Integration ger $\arctan y = \frac{x^3}{3} + C$, där C är en konstant som bestäms av villkoret att $y(0) = 1$. Det ger $\arctan 1 = 0 + C$, så $C = \frac{\pi}{4}$. Då $y(x)$ löses ut, fås $y(x) = \tan(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4})$, då $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, dvs $-\frac{3\pi}{4} < \frac{x^3}{3} < \frac{\pi}{4}$.
Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = \tan(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4})}$, då $\boldsymbol{-\sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}} < x < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}}$.



2. Vi söker den allmänna lösningen till $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \quad x > 0$, då vi vet att $y_1(x) = e^x$ är en lösning.
För att använda reduktion av ordningen skriver vi $y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$. Det ger $y' = (u' + u)e^x$ och $y'' = (u'' + 2u' + u)e^x$. Insättning ger att ekvationen blir $(x(u'' + 2u' + u) - (2x+1)(u' + u) + (x+1)u)e^x = 0$. Eftersom $e^x \neq 0$ är det detsamma som $xu'' - u' = 0$. Med $v = u'$ har vi alltså ekvationen $xv' - v = 0$, dvs ($x > 0$ ju) $v' - \frac{1}{x}v = 0$. En integrerande faktor är $e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = \frac{1}{x}$ och ekvationen kan skrivas $(\frac{1}{x}v)' = 0$, med lösning $\frac{1}{x}v = C$, dvs $v(x) = Cx = u'(x)$, C en konstant. Så $u(x) = C\frac{x^2}{2} + c_2$ och (med $c_1 = \frac{C}{2}$) $y(x) = u(x)e^x = c_1x^2e^x + c_2e^x$. Således **Svar:**
Den allmänna lösningen är $\boldsymbol{y(x) = c_1x^2e^x + c_2e^x}$, $\boldsymbol{c_{1,2}}$ godtyckliga konstanter.

3. Vi söker alla $y(t)$ som uppfyller $y'' + y' - 2y = 3\,\delta(t-1)$ och $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
Laplacetransformering ger $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$, $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 1$ och $\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$. Insättning i ekvationen ger $s^2Y(s) - s - 1 + sY(s) - 1 - 2Y(s) = 3e^{-s}$, dvs $(s^2 + s - 2)Y(s) = (s-1)(s+2)Y(s) = s + 2 + 3e^{-s}$. Vi löser ut och partialbråksuppdelar, vilket ger $Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{e^{-s}}{s-1} - \frac{e^{-s}}{s+2}$. Eftersom $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ och $\mathcal{L}\{f(t-b)\mathcal{U}(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ (då $b \geq 0$, $\mathcal{U}$ är Heavisides stegfunktion) fås
Svar: $\boldsymbol{y(t) = e^t + e^{t-1}\,\mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)}\,\mathcal{U}(t-1)}$.

4. Vi söker $\mathbf{x}(t)$ som uppfyller $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer. Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \left|\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{smallmatrix}\right| = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4\cdot 1 = \lambda^2 + \lambda - 6$, med lösningar $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - (-6)} = 2, -3$. Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 4 & -4 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = -3$: $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & | & 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i\mathbf{k}_i e^{\lambda_i t} = c_1\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} + c_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)e^{-3t}$. Villkoret $\mathbf{x}(0) = c_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ ger $c_1 = 1, c_2 = -1$, så
Svar: Lösningen är $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{-3t} \\ e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}}$.

5. Vi söker konstanten a så att $f(x) = x + a$ och $g(x) = x^2 + 1$ är ortogonala på intervallet $[0,1]$, dvs $0 = (f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 (x+a)(x^2+1)\,dx = \int_0^1 (x^3 + ax^2 + x + a)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{1}{2} + a = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}a$, vilket ger
Svar: $\boldsymbol{a = -\frac{9}{16}}$.

6a. Vi söker en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ till systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

En fundamentalmatris har linjärt oberoende lösningar som kolonner, vi söker dem. Eftersom $\mathbf{A}$ bara har 0:or under diagonalen ges egenvärdena av diagonalelementen, $\lambda_{1,2} = 1, 3$. Motsvarande egenvektorer fås som i uppgift **4**, de är $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. De ger linjärt oberoende lösningar $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{k}_1 e^t$ och $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{k}_2 e^{3t}$, så

Svar: $\boldsymbol{\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}}$**.**

6b. Vi söker den allmänna lösningen till systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

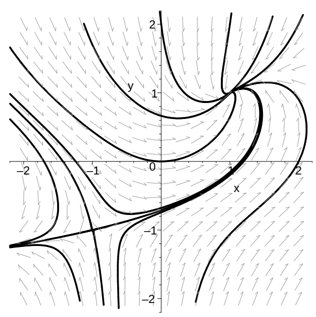
Vi använder variation av parametrar och skriver $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$, vilket ger ekvationen $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \left(\begin{smallmatrix} e^t \\ 2e^t \end{smallmatrix}\right)$, som ger $\mathbf{u}'(t) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2e^{-2t} \end{smallmatrix}\right)$, så $\mathbf{u}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -t+c_1 \\ -e^{-2t}+c_2 \end{smallmatrix}\right)$. Insättning ger

Svar: Lösningen $\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -(1+t)\,e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}$ **godtycklig, konstant.**

7. Vi söker alla $f(t)$ med $f(0) = 0$ som uppfyller $f'(t) + \int_0^t e^{2u} f(t-u)\,du = 2(\cos t - \sin t)$. Laplacetransformering ger $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ och $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) = sF(s)$, medan integralen är en faltning, så $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{2u} f(t-u)\,du\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-2}F(s)$. Vidare gäller $\mathcal{L}\{2(\cos t - \sin t)\} = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$. Man får ekvationen $sF(s) + \frac{1}{s-2}F(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, dvs $\frac{s^2-2s+1}{s-2}F(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, så $F(s) = \frac{2(s-2)}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{s+3}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}$ (partialbråksuppdelning) och

Svar: $\boldsymbol{f(t) = \cos t + 3\sin t - e^t}$**.**

8. Vi söker alla kritiska punkter och deras stabilitet för det autonoma systemet $\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x - y^3 \end{cases}$.



De kritiska punkterna är lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} 1 - xy = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases}$. Den andra ekvationen säger att $x = y^3$ och då det sätts in i den första fås $1 = y^4$, så (y reell) $y = \pm 1$ och de kritiska punkterna är $(1,1)$ och $(-1,-1)$. För att linearisera kring dem använder vi jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{smallmatrix}\right)$.

För $(x,y) = (1,1)$, $\mathbf{J}(1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, enda egenvärde $\lambda = -2$. $\mathrm{Re}\lambda < 0$, så $(1,1)$ är en stabil kritisk punkt (en oegentlig nod).

P.s.s. $\mathbf{J}(-1,-1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, egenvärden $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$, så $(-1,-1)$ är en instabil kritisk punkt (en sadelpunkt).

Svar: Kritiska punkter: $\boldsymbol{(1,1)}$ **(stabil) och** $\boldsymbol{(-1,-1)}$ **(instabil).**

9. I en kvadratisk platta, sidolängd π, är temperaturen $u(x,y)$. Stationär temperatur, så den uppfyller Laplaces ekvation $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Randvillkoren är $u(0,y) = u(x,0) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,\pi) = 1$, då $0 < x, y < \pi$. Vi söker $u(x,y)$.

Variabelseparation: Lösning av formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ger $\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = Y(0) = 0. \end{cases}$

$X'' = -\lambda X$, $X(0) = X(\pi) = 0$ har lösningar (andra än 0) precis då $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$.
De motsvarande lösningarna är $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n \sin nx \sinh ny$.
Superposition ger vår allmänna lösning $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh ny$.
Koefficienterna c_n bestäms av det inhomogena randvillkoret $u(x,\pi) = 1$, $0 < x < \pi$, dvs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \sinh n\pi = 1$, $0 < x < \pi$. En sin-serie, så $c_n \sinh n\pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 \cdot \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} \left(= \begin{cases} 0, & n \text{ jämnt,} \\ \frac{4}{\pi n}, & n \text{ udda} \end{cases} \right)$. Insättning ger

Svar: $\boldsymbol{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx \frac{\sinh ny}{\sinh n\pi}}$**.**

10. Funktionen $f(x)$ är deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$ och $y(x) = y_0(x)$ löser $y' + e^{f(x)}y = f'(x)$. Vi söker en lösning $z(x)$ till $z' + y_0'(x)z = y_0(x)$.
z-ekvationen har integrerande faktorn $e^{y_0(x)}$ och kan skrivas $(e^{y_0(x)}z)' = y_0(x)e^{y_0(x)}$. Eftersom $y_0' + e^{f(x)}y_0 = f'(x)$, får man $y_0(x)e^{y_0(x)} = -(y_0'(x) - f'(x))e^{y_0(x)-f(x)} = (-e^{y_0(x)-f(x)})'$, så $e^{y_0(x)}z(x) = -e^{y_0(x)-f(x)} + C$, C konstant. Allmänna lösningen är alltså $z(x) = -e^{-f(x)} + C\,e^{-y_0(x)}$. $C = 0$ ger en lösning som inte innehåller $y_0(x)$.

Svar: En lösning är $\boldsymbol{z(x) = -e^{-f(x)}}$**.**