KTH Matematik

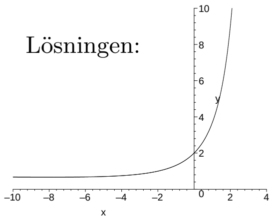
Lösningar kompletteringen 5B1206, Differentialekvationer I, 4 december 2006

1. Lös följande begynnelsevärdesproblem och ange det största intervall där lösningen är definierad

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{4-x}\,y = \frac{2x}{(4-x)^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen.
En integrerande faktor ges av $e^{\int -\frac{2}{4-x}\,dx} = e^{2\ln|4-x|} = (4-x)^2$.
Då ekvationen multipliceras med denna faktor fås
$(4-x)^2y' - 2(4-x)y = 2x$, dvs $((4-x)^2y)' = 2x$, så
$(4-x)^2y = x^2 + C$, C en konstant, som bestäms av begynnelsevillkoret: $(4-0)^2 \cdot 2 = 0^2 + C$, så $C = 32$ och $y(x) = \frac{x^2+32}{(4-x)^2}$.
Eftersom funktionen bara ger en lösning i ett **intervall** där den är deriverbar och den är given för $x = 0$ och inte definierad för $x = 4$, är det sökta intervallet $]-\infty, 4[$.

Lösningen:



Svar: Lösningen ges av $\boldsymbol{y(x) = \frac{x^2+32}{(4-x)^2}}$ i det maximala intervallet $\boldsymbol{]-\infty, 4[}$.

2. Differentialekvationen $y'' - \frac{2x+1}{x}\,y' + \frac{x+1}{x}\,y = 0$, $x > 0$, har lösningarna $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = x^2e^x$ (det behöver du inte visa).
Använd detta för att finna den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - \frac{2x+1}{x}\,y' + \frac{x+1}{x}\,y = \frac{2xe^x}{x^2+1}, \quad x > 0.$$

Lösning: Eftersom $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = x^2e^x$ är linjärt oberoende (ty $c_1e^x + c_2x^2e^x = (c_1 + c_2x^2)e^x = 0$ (för alla x) bara om $c_1 = c_2 = 0$ — eller använd Wronskideterminanten), utgör de en fundamentalmängd lösningar till den homogena ekvationen.
Vi använder **variation av parametrar**. Alla lösningar till den inhomogena ekvationen kan skrivas $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, där $u_1(x), u_2(x)$ uppfyller (koeff. för y'' är ju 1) $u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$ och $u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) =$ ekv:s HL, dvs

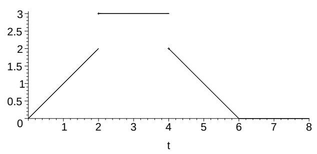
$$\begin{cases} u_1'(x)e^x + u_2'(x)x^2e^x = 0 \\ u_1'(x)e^x + u_2'(x)(x^2+2x)e^x = \frac{2xe^x}{x^2+1} \end{cases},$$

med lösning $u_1'(x) = -\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} - 1, u_2'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Integration ger $u_1(x) = \arctan x - x + c_1, u_2(x) = \arctan x + c_2$, $c_{1,2}$ godtyckliga konstanter. Därur fås $y(x) = (\arctan x - x + c_1)e^x + (\arctan x + c_2)x^2e^x = (x^2+1)\,e^x \arctan x - xe^x + c_1e^x + c_2x^2e^x$.
Svar: Den allmänna lösningen är $\boldsymbol{y(x) = (x^2+1)\,e^x \arctan x - xe^x + c_1e^x + c_2x^2e^x}$, $\boldsymbol{c_{1,2}}$ godtyckliga konstanter.

3. Finn laplacetransformen för funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , 0 \le t < 2 \\ 3 & , 2 \le t < 4 \\ 6-t & , 4 \le t < 6 \\ 0 & , 6 \le t \end{cases}.$$

Figur:

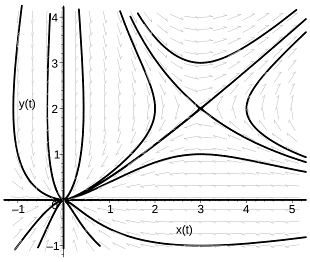


Lösning: Uttryck först $f(t)$ med Heavisides stegfunktion $\mathcal{U}(t)$ och omforma,
$f(t) = t(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)) + 3(\mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-4)) + (6-t)(\mathcal{U}(t-4) - \mathcal{U}(t-6)) =$
$= t\,\mathcal{U}(t) - (t-3)\,\mathcal{U}(t-2) - (t-3)\,\mathcal{U}(t-4) + (t-6)\,\mathcal{U}(t-6) =$
$= t\,\mathcal{U}(t) - ((t-2)-1)\,\mathcal{U}(t-2) - ((t-4)+1)\,\mathcal{U}(t-4) + (t-6)\,\mathcal{U}(t-6)$,
för att använda att $\mathcal{L}\{g(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{g(t)\}$, $(a \ge 0)$.
Vi får $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}) - e^{-4s}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}) + e^{-6s}\frac{1}{s^2}$.
Svar: Laplacetransformen är $\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}) - e^{-4s}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}) + e^{-6s}\frac{1}{s^2}}$ $\boldsymbol{(= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s} - e^{-4s} + e^{-6s}) + \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-4s}))}$.
(**Alternativt** kan man förstås beräkna integralen i laplacetransformens definition.)

4. Finn alla kritiska punkter för följande autonoma system. Bestäm också för var och en av dem (om möjligt) dess typ och avgör om den är stabil eller instabil.

$$\begin{cases} x' = x(y-2) \\ y' = y(x-3) \end{cases}.$$

Lösning: De kritiska punkterna är lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} x(y-2) = 0 \\ y(x-3) = 0 \end{cases}$. Den första ekvationen ger att $x = 0$ (då den andra ger att $y = 0$) eller $y = 2$ (då den andra ger att $x = 3$). De kritiska punkterna är alltså $(0,0)$ och $(3,2)$. För att linearisera kring dem kan vi använda jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y-2 & x \\ y & x-3 \end{pmatrix}$.



För $(x,y) = (0,0)$, $\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, med egenvärden $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Två reella egenvärden, båda negativa, så $(0,0)$ är en stabil nod.
P.s.s. $\mathbf{J}(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, med egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Två reella egenvärden med olika tecken, så $(3,2)$ är en sadelpunkt, således instabil.
Svar: Kritiska punkter: $(0,0)$, en stabil nod, och $(3,2)$, en sadelpunkt (instabil).

(Här fås $\mathbf{J}(0,0)$ och $\mathbf{J}(3,2)$ enklare genom att betrakta termer i x', y' som är linjära i avvikelsen.)

5. Finn (fourier-)sinusserien för funktionen $f(x) = 1 - x$, $0 < x < \pi$.
Vad konvergerar serien mot då $x = -\frac{\pi}{2}$?

Lösning: Sinusserien för $f(x)$ (definierad på intervallet $[0,\pi]$) ges av $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, där, för $n = 1, 2, \ldots$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-(1-x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -(-1)\frac{\cos nx}{n}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-(1-\pi)\frac{\cos n\pi}{n} + (1-0)\frac{\cos n\cdot 0}{n}\right) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi =$
$\frac{2}{\pi}\left(-(1-\pi)\frac{(-1)^n}{n} + 1\cdot\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{\pi}(0-0) = (1-(-1)^n)\,\frac{2}{\pi n} + (-1)^n\frac{2}{n}$

f:s sinusserie konvergerar mot en udda, 2π-periodisk funktion som sammanfaller med $f(x)$ då ($f(x)$ är kontinuerlig och) $0 < x < \pi$. För $x = -\frac{\pi}{2}$ konvergerar den alltså mot $-f(\frac{\pi}{2}) = -(1-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$.
Svar: Serien är $\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-(-1)^n)\,\frac{2}{\pi n} + (-1)^n\frac{2}{n}\right)\sin nx$.
För $x = -\frac{\pi}{2}$ konvergerar den mot $\frac{\pi}{2} - 1$.

(**Alternativt** kan man kombinera sinusserierna för 1 och x (från formelsamlingen).)

I figurerna visas partialsummorna med 10 respektive 30 termer: