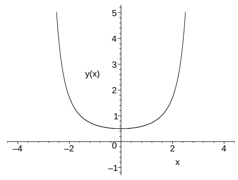
KTH Matematik

Lösningar kompletteringen 5B1206, Differentialekvationer I, 9 februari 2007 (till tentan 10 januari 2007)

1. Finn den funktion $y(x)$ som löser följande begynnelsevärdesproblem och ange det största intervall där funktionen är en lösning till problemet

$$\begin{cases} y' = y^2 \sin x \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Lösning: Ekvationen är separabel, den kan skrivas $\frac{y'}{y^2} = \sin x$. Integration ger $-\frac{1}{y} = -\cos x + C$, där C är en konstant som bestäms av villkoret att $y(0) = \frac{1}{2}$. Det ger $-\frac{1}{\frac{1}{2}} = -\cos 0 + C = -1 + C$, så $C = -1$. Då $y(x)$ löses ut, fås $y(x) = \frac{1}{1+\cos x}$. Det största intervallet där denna funktion är definierad (och deriverbar) och som innehåller $x = 0$ är $]-\pi, \pi[$.



Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = \frac{1}{1+\cos x}}$, då $\boldsymbol{-\pi < x < \pi}$.

2. Visa att följande differentialekvation har en lösning $y(x) = x^2$,

$$x^2y'' + (2x^2 - 4x)y' - (4x - 6)y = 0, \quad x > 0.$$

Använd sedan detta för att finna den allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning: Vi använder ”reduktion av ordningen”. Låt $y(x) = u(x)y_1(x) = x^2u(x)$. Då fås $y' = x^2u' + 2xu$ och $y'' = x^2u'' + 4xu' + 2u$, så insättning i ekvationen ger $x^2(x^2u'' + 4xu' + 2u) + (2x^2 - 4x)(x^2u' + 2xu) - (4x - 6)x^2u$, dvs den givna ekvationen är ekvivalent med $x^4u'' + 2x^4u' = 0$, dvs $u'' + 2u' = 0$. Speciellt ses att $u(x) = 1$ är en lösning, så **$\boldsymbol{y(x) = x^2}$ är en lösning till den givna ekvationen**.
u-ekvationen ger (integrerande faktor e^{2x} etc.) $(e^{2x}u')' = 0$, $u' = Ce^{-2x}$, C en konstant, och $u = -\frac{C}{2}e^{-2x} + B$. $y(x) = x^2u(x)$, så
Svar: Allmän lösning $\boldsymbol{y(x) = Ax^2e^{-2x} + Bx^2}$, $\boldsymbol{A, B}$ godtyckliga konstanter.

3. –

4. Finn den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till ekvationen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösning: Låt $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, så ekvationen är $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer. Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \left|\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 9 & 4-\lambda \end{smallmatrix}\right| = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 \cdot 9 = \lambda^2 - 5\lambda - 50$, med lösningar $\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - (-50)} = \frac{5}{2} \pm \frac{15}{2} = 10, -5$. Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 10$: $\left(\begin{smallmatrix} -9 & 6 \\ 9 & -6 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = -5$: $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 9 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av ($c_{1,2}$ godtyckliga konstanter)
$\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i\mathbf{k}_ie^{\lambda_it} = c_1\mathbf{k}_1e^{\lambda_1t} + c_2\mathbf{k}_2e^{\lambda_2t} = c_1\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)e^{10t} + c_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{-5t}$.

Svar: Allmänna lösningen är $\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{10t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-5t}}$, $\boldsymbol{c_{1,2}}$ konstanter.

5. En stav av längd L har vid tiden $t = 0$ temperaturen

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L} + 2\sin\frac{3\pi x}{L}.$$

Stavens ändpunkter vid $x = 0$ och $x = L$ hålls vid temperatur 0.
Bestäm $u(x,t)$ för $t > 0$, då temperaturen i staven antas uppfylla den endimensionella värmeledningsekvationen.

Lösning: Problemet blir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < L, t > 0, \qquad \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \qquad \text{RV} \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L} + 2\sin\frac{3\pi x}{L}, & 0 < x < L \qquad \text{BV} \end{cases}$$

Variabelseparation, vi söker lösningar av form $u(x,t) = X(x)T(t)$ till PDE+RV:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\lambda, \text{ konstant} \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

ger som vanligt icke–triviala lösningar bara då $\lambda = \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$,
$X_n(x) = \text{konst.} \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}$, $T_n(t) = \text{konst.} \cdot e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$, $n = 1, 2, \ldots,$
så $u_n(x,t) = b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$

Superposition ger lösningen
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$,
där b_n bestäms av $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$.
I vårt fall är $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L} + 2\sin\frac{3\pi x}{L}$,
dvs $b_1 = 1$, $b_3 = 2$, övriga $b_n = 0$, så

Svar: Temperaturen blir för $0 \le x \le L$, $t \ge 0$:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sin\frac{\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{\pi}{L})^2 t} + 2\sin\frac{3\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{3\pi}{L})^2 t}}$$