(Differentialekvationer I, ht07: F18, må 29 oktober)

Variabelseparation för vågekvationen och Laplaces ekvation

1. Vågekvationen i en (rums-)dimension

$$\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{a^2} u''_{tt} & & \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 & \text{RV} \\ \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{cases}, & 0 < x < L & \text{BV} \end{cases}$$

Separerade lösningar till **PDE+RV**: $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda, \ \textbf{konstant} \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Alla icke–triviala: $u_n(x,t) = (a_n \cos\frac{n\pi at}{L} + b_n \sin\frac{n\pi at}{L}) \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$
Superposition ger $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ och konstanterna a_n, b_n
bestäms av **BV** $\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) \\ u'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x) \end{cases}$ **sinusserier**

I en dimension (som här) kan lösningen skrivas

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f_u(x-at)+f_u(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g_u(y)\,dy, \quad \textbf{d'Alemberts lösning}$$

(f_u, g_u är de **udda, 2L–periodiska** fortsättningarna av f, g).

2. Laplaces ekvation i två dimensioner

Lösningar till Laplaces ekvation kallas **harmoniska funktioner**.
Problemet i en rektangel kan delas upp i fyra problem som

$$\begin{cases} \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0 & \text{PDE} \\ \begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases} & \text{RV} \end{cases}$$

Separerade lösningar till **PDE+homogena RV**: $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ger

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \ \textbf{konstant} \\ X(0) = X(a) = Y(0) = 0 \end{cases}$$

Icke–triviala lösningar: $u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$
Superposition ger $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)$ och konstanterna b_n bestäms av
inhomogena RV $u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} = f(x)$ **sinusserie**

Variabelseparation i polära koordinater ger lösningen (snäll i origo):

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left(= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \right)$$

Speciellt är värdet för $r = 0$, $u(r,\cdot) = a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R,\theta)\,d\theta$, dvs
medelvärdesegenskapen: Om u är harmonisk, är $u(x,y) =$ medelvärdet av värdena på en cirkel med (x,y) som medelpunkt. Därur fås
maximumprincipen: Om u är harmonisk (i ett sammanhängande område) och har **lokalt maximum eller minimum** i en inre punkt är u **konstant**.
Harmoniska funktioner är C^{∞}, dvs godtyckligt många gånger deriverbara.