(Differentialekvationer I, ht07: F17, to 25 oktober)

Tre viktiga linjära PDE

1. Värmeledningsekvationen i en (rums-)dimension

$u(x,t)$ temperaturen vid x, tid t, i en stav med endimensionell värmeledning. Energijämvikt för ett litet stycke av staven ger ekvationen. ($k > 0$, konstant.)

Ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

en **parabolisk** ekvation

typiskt problem:

$$\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{k} u'_t & \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 & \text{RV} \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L & \text{BV} \end{cases}$$

Om en ändpunkt är termiskt isolerad fås RV $u'_x(\begin{smallmatrix}0\\L\end{smallmatrix}, t) = 0$.
Koncentrationen av ett diffunderande ämne lyder samma ekvation.

2. Vågekvationen i en (rums-)dimension

$u(x,t)$ utslaget vid x, tid t, för en spänd sträng.
Kraftekvationen för en kort bit av strängen ger ekvationen. ($a > 0$, konstant.)

Ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

en **hyperbolisk** ekvation

typiskt problem:

$$\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{a^2} u''_{tt} & \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 & \text{RV} \\ \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{cases}, \quad 0 < x < L & \text{BV} \end{cases}$$

Ekvationen beskriver många sorters vågrörelse (men inte vattenvågor).
RV $u'_x(\begin{smallmatrix}0\\L\end{smallmatrix}, t) = 0$ fås för gassvängningar inuti och längs ett rör med en öppen ände (t.ex. en flöjt) och för en sträng fäst i en masslös, friktionsfri ring.

3. Laplaces ekvation i två dimensioner

$u(x,y)$ stationär (dvs tidsoberoende) temperaturfördelning.
Att nettoinflödet genom en sluten kurva måste vara 0 ger ekvationen.

Ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en **elliptisk** ekvation

typiskt problem:

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0 & \text{PDE} \\ u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma & \text{RV} \end{cases}$$

Ett givet flöde genom Γ (t.ex. isolering) ger RV med villkor på $\nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$.

Lösning av värmeledningsekvationen med **variabelseparation**

För att lösa värmeledningsproblemet ovan söker man först **separerade** lösningar, dvs på formen $X(x)T(t)$, till **PDE+RV**.
PDE ger $\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\lambda$, **konstant**, och $X(0) = X(L) = 0$, så
$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$, $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$, $n = 1, 2, \ldots$
Superposition ger lösningar $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)$, b_n konstanter.
b_n ges entydigt av **BV**: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$, $f(x)$:s sinusserie.
För alla $t > 0$ avtar $b_n\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$ snabbt med n, $u(x,t)$ är C^∞, dvs godtyckligt många gånger deriverbar.
För "de flesta" BV har ekvationen ingen lösning för $t < 0$, den beskriver fundamentalt **irreversibla** förlopp.

En explicit lösning till PDE: $v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ $(\to \delta(x)$ då $t \to 0+)$
och till PDE+RV: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (v(x - (a + 2nL), t) - v(x - (-a + 2nL), t))$