(Differentialekvationer I, ht07: F16, må 22 oktober)

Cosinus- och sinusserier

Låt $f(x)$ vara definierad i intervallet $[0, \pi]$.

1. $f(x)$ kan fortsättas till en **jämn, 2π-periodisk** funktion $\boldsymbol{f_j(x)}$ enligt

$$\begin{cases} f_j(x) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ f_j(x) = f(-x) & -\pi \le x \le 0, \\ f_j(x+2\pi) = f_j(x) & \text{alla } x \end{cases}$$

Eftersom $f_j(x)$ är jämn, innehåller dess fourierserie inga sin-termer, så

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad 0 \le x \le \pi,$$

där $a_n (= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) \cos nx \, dx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $\boldsymbol{f}$**:s cosinusserie**.

2. $f(x)$ kan fortsättas till en **udda, 2π-periodisk** funktion $\boldsymbol{f_u(x)}$ enligt

$$\begin{cases} f_u(x) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ f_u(x) = -f(-x) & -\pi \le x \le 0, \\ f_u(x+2\pi) = f_u(x) & \text{alla } x \end{cases}$$

Eftersom $f_u(x)$ är udda, innehåller dess fourierserie inga cos-termer, så

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 \le x \le \pi,$$

där $b_n (= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_u(x) \sin nx \, dx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$, $\boldsymbol{f}$**:s sinusserie**.

3. Om $f(x)$ i stället fortsätts till en **π-periodisk** funktion $\boldsymbol{f_p(x)}$ enligt

$$\begin{cases} f_p(x) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ f_p(x+\pi) = f_p(x) & \text{alla } x \end{cases}$$

innehåller f_p:s fourierserie bara varannan term i en 2π-periodisk funktions,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos 2nx + b_n' \sin 2nx), \quad 0 \le x \le \pi,$$

där $a_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx \, dx (= a_{2n})$, $b_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin 2nx \, dx (= b_{2n})$.

Periodiskt högerled i en linjär ODE med konstanta koefficienter

Om ODE:n är $L(y) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T})$, kan man **ansätta** en partikulärlösning $y_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + B_n \sin \frac{2\pi nt}{T})$. **Om** man inte har resonans för något n kan A_n, B_n bestämmas med insättning och identifikation av koefficienter.

Klassifikation av linjära 2:a ordningens PDE med konstanta koefficienter

Ekvationen $Au''_{xx} + Bu''_{xy} + Cu''_{yy} + Du'_x + Eu'_y + Fu = 0$ kallas

elliptisk om $B^2 - 4AC < 0$
parabolisk om $B^2 - 4AC = 0$
hyperbolisk om $B^2 - 4AC > 0$

Villkoren är oberoende av variabelbyten.