

(Differenialekvationer I, ht07: F15, fr 19 oktober)

Fourierserier

Om $f(x)$ är en 2π -periodisk funktion är dess **fourierserie**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\text{där} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n = 0, 1, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

(Alternativt: $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ där $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

(Om $f(x)$ i stället är $2p$ -periodisk fås fourierserien

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}), \text{ där } \begin{cases} a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx, & n = 0, 1, \dots \\ b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Inre produkten av $f(x)$ och $g(x)$: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$

(jfr med skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ för vektorer i rummet)

Normen för $f(x)$: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$

Om $\{\varphi_n\}$ är en mängd **ortogonal**a funktioner,

dvs $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ då $m \neq n$ (t.ex. $\{1, \cos mx, \sin nx\}$), så gäller att

$$\|f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n\| \text{ minimeras av } c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

Om $\{\varphi_n\} = \{1, \cos mx, \sin nx\}$ (t.ex.), så gäller med dessa c_n (dvs a_n, b_n ovan)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n\| = 0.$$

$\{1, \cos mx, \sin nx\}$ fungerar alltså som **en ortogonal bas** i rummet av funktioner och f 's fourierserie konvergerar i denna mening mot f .

Om f och f' båda är styckvis kontinuerliga gäller dessutom för alla x att

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Speciellt konvergerar serien mot $f(x)$ i alla punkter där f är kontinuerlig.

I ett exempel gav oss detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Gibbs fenomen
Summan med 100 termer

Gibbs fenomen

Om $f(x)$ har ett språng kommer seriens summor att vid språnget "svänga över" med ca 0,089-språnget, se exemplet i fig.

