

Stabilitet i kritiska punkter till **icke-linjära** autonoma system,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Dessa studeras "lokalt" med hjälp av approximation av $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ med en linjär funktion nära den kritiska punkten:

Om $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ och $\mathbf{g}$ är "snäll", nämligen **differentierbar** i $\mathbf{x}_0$, dvs

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{R}(\mathbf{u}),$$

$$\text{där } \mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad \text{är Jacobimatrisen för } \mathbf{g} \text{ i } \mathbf{x}_0 \text{ och för}$$

resttermen $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ gäller $\frac{|\mathbf{R}(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} \rightarrow 0$ då $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$, så gäller

Sats: Om $\det \mathbf{A} \neq 0$ (och $n = 2$) är **typ** och **stabilitet** för $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}_0$ samma som för det **lineariserade systemet** $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ i $\mathbf{0}$,

utom (möjligen) då $\mathbf{A}$:s egenvärden är lika (typerna kan vara olika) eller $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ har ett centrum (typ och stabilitet kan vara olika).

Alltid (alla n), om $\mathbf{A}$ har egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots$,
som för det linjära systemet:

om alla $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ är $\mathbf{x}_0$ **asymptotiskt stabil**

om något $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ är $\mathbf{x}_0$ **instabil**

Men, inte som det linjära systemet:

om det största $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ kan $\mathbf{x}_0$ vara **asymptotiskt stabil**, **stabil** eller **instabil**

För att $\mathbf{g}$ skall vara differentierbar räcker det att alla dess komponenter har kontinuerliga förstaderivator nära $\mathbf{x}_0$, dvs att $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ är kontinuerlig i en omgivning till $\mathbf{x}_0$.

Till varje asymptotiskt stabil kritisk punkt hör en **attraktionsdomän**, bestående av de punkter i fasplanet som "hamnar i" den kritiska punkten då $t \rightarrow \infty$.

Också till t.ex. periodiska lösningar kan det höra attraktionsdomäner, av de punkter som "attraheras till" den lösningen då $t \rightarrow \infty$.

Olika attraktionsdomäner skiljs åt av kurvor som kallas **separatriser**.