(Differentialekvationer I, ht07: F12, to 11 oktober)

Autonoma system

Ekvationen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

där $\mathbf{x}$ och $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ är $n \times 1$–kolonnvektorer beskriver (t.ex. fysikaliska) system som inte förändras med t (fast lösningarna förstås i allmänhet är t–beroende). $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ kan ses som ett t–oberoende vektorfält i fasplanet ($n = 2$) eller fasrummet. Som för de linjära systemen studerar vi **fasporträtt**, bilder av fasplanet med typiska banor.

Varje bana i fasrummet är av precis en av **tre typer**:

- **konstanta lösningar** $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$, med $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, **kritiska punkter**
- **periodiska lösningar** $\mathbf{x}(t)$, icke–konstanta med $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$, några $t_1 \neq t_2$
- **aperiodiska lösningar** $\mathbf{x}(t)$, sådana att $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2)$

Stabilitet

En **kritisk punkt** $\mathbf{x}_0$ till den autonoma ekvationen $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ kallas

- **stabil** om lösningen $\mathbf{x}(t)$ stannar nära $\mathbf{x}_0$ för $\mathbf{x}(0)$ tillräckligt nära $\mathbf{x}_0$, **dvs** för varje $\rho > 0$ finns $r > 0$, så att
$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < r \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \rho, \text{ alla } t > 0$$
- **asymptotiskt stabil** om det finns $r > 0$ så att
$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < r \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$$
- **instabil** om den inte är stabil,
dvs om det finns $\rho > 0$ så att för alla $r > 0$ finns $\mathbf{x}(t)$ med
$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < r,\ |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| \geq \rho, \text{ något } t$$

Ibland kan stabiliteten för $\mathbf{0}$ undersökas genom att införa **polära koordinater**:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r' = \frac{1}{r}(xx' + yy') \\ \theta' = \frac{1}{r^2}(-yx' + xy') \end{cases}$$

För **linjära homogena** autonoma system $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$ en konstant $n \times n$–matris med egenvärden $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$ gäller

om alla $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ är **$\mathbf{0}$ asymptotiskt stabil**
om något $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$ är **$\mathbf{0}$ instabil**
om det största $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ är **$\mathbf{0}$ stabil** eller **instabil**