(Differentialekvationer I, ht07: F11, ti 9 oktober)

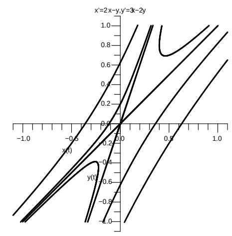
## Homogena linjära autonoma system, forts.

Om den konstanta och reella $2 \times 2$-matrisen $\mathbf{A}$ har egenvärdena $\lambda_1$ och $\lambda_2$, båda $\neq 0$, har systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ den enda kritiska punkten $\mathbf{0}$, som är av någon av följande typer:

**Sadelpunkt**

$\lambda_{1,2}$ reella, olika tecken

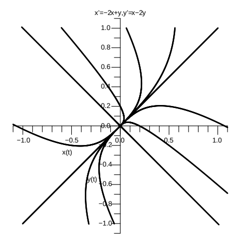
$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k}_2$



**Nod**

$\lambda_{1,2}$ reella, samma tecken

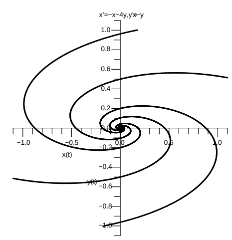
$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k}_2$



**Spiral**

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha \neq 0$

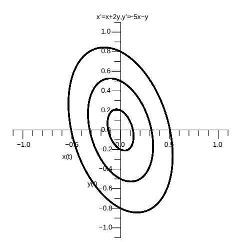
$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) +$
$c_2 e^{\alpha t}(\mathbf{b}\cos\beta t + \mathbf{a}\sin\beta t)$



**Centrum**

$\lambda_{1,2} = \pm i\beta,$

$\mathbf{x}(t) = c_1(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) +$
$c_2(\mathbf{b}\cos\beta t + \mathbf{a}\sin\beta t)$

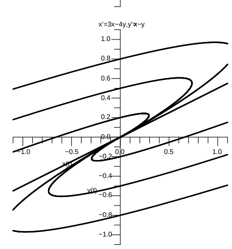


**Oegentlig nod**

$\lambda_1 = \lambda_2$, reella, bara ”en” egenvektor

$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{k} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{k} + \mathbf{p})$

$(\mathbf{A}\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k},\ \mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} + \mathbf{k})$



## Inhomogena linjära system, dvs $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

**Om $\mathbf{A}$** är konstant och $\mathbf{f}(t)$ består av summor av produkter av polynom, cos, sin och exponentialfunktioner, kan **ansats** användas.

Allmännare, om **fundamentalmatrisen** $\mathbf{\Phi}(t)$ för det homogena systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ är känd: **variation av parametrar**,
sätt $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$. Problemet blir $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t)$,

$$\Big(\text{med lösningen } \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0.\Big)$$