(Differentialekvationer I, ht07: F10, to 4 oktober)

## System av första ordningens linjära ODE

Högre ordningars linjära ODE kan ses som system av första ordningens ODE, dvs **matrisekvationer**:

$$y^{(n)} + d_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + d_0(t)y = h(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

där $$\underset{n\times 1}{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \underset{n\times n}{\mathbf{A}(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}, \underset{n\times 1}{\mathbf{f}(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}$$

**Sats:** (Global och entydig lösbarhet för linjära system)
Låt $\mathbf{A}(t)$ och $\mathbf{f}(t)$ vara **kontinuerliga** funktioner av $t$ i intervallet $I$ och $t_0 \in I$. Då har för alla $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) **begynnelsevärdesproblemet**

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

en **entydig lösning** $\mathbf{x}(t)$ i **hela intervallet** $I$.

**Superpositionsprincipen** för **homogena** linjära system:
Om $\underset{n\times k}{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\, \dots\, \mathbf{x}_k)$, där $\mathbf{x}_i$:na alla uppfyller $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ (så $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$), så gör $\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{c} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$ också det, för varje konstant $\underset{k\times 1}{\mathbf{c}}$.

**Sats:** Om $\underset{n\times n}{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\, \dots\, \mathbf{x}_n)$, där $\mathbf{x}_i' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i$ (dvs $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$) och $\mathbf{A}(t)$ är kontinuerlig i $I$, är **wronskideterminanten** $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t) = \det \mathbf{X}(t)$ **antingen** $= 0$ för alla $t \in I$ **eller** $\neq 0$ för alla $t \in I$. $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$ är alltså linjärt oberoende för **alla** $t \in I$ om den är det för **något** $t \in I$.

Om $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0$ kallas $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ en **fundamentalmängd** lösningar och $\mathbf{\Phi}(t) = (\mathbf{x}_1\, \dots\, \mathbf{x}_n)$ en **fundamentalmatris** för den homogena ekvationen.

$\underset{n\times n}{\mathbf{\Phi}(t)}$ är en fundamentalmatris för ekvationen precis om $\begin{cases} \mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi} \\ \det \mathbf{\Phi}(t_0) \neq 0 \end{cases}$

**Sats:** Om $\mathbf{A}(t)$ är kontinuerlig i $I$, finns ett sådant $\mathbf{\Phi}$ i $I$.

Den **allmänna lösningen** till ekvationen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ är då $\mathbf{x}_p + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}$, $\mathbf{x}_p$ en (”partikulär–”)lösning, $\underset{n\times 1}{\mathbf{c}}$ godtycklig konstant.
Om $\mathbf{f}(t) \equiv 0$ (dvs ekvationen homogen) kan man ta $\mathbf{x}_p(t) \equiv 0$.

## Homogena, autonoma system, dvs $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ konstant:

**Om $\mathbf{A}$** har $n$ linjärt oberoende **egenvektorer** $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ med $\mathbf{A}\mathbf{k}_i = \lambda_i\mathbf{k}_i$ (speciellt om alla $\lambda_i$ är olika eller $\mathbf{A}$ är symmetrisk) är den allmänna lösningen

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{k}_i, \text{ dvs man kan välja } \mathbf{\Phi}(t) = \left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 \dots e^{\lambda_n t}\mathbf{k}_n\right).$$

Vi studerar speciellt för $n = 2$ **fasporträtt** för systemet, dvs en bild av $x_1x_2$–planet (kallat $xy$–planet), **fasplanet**, med ett antal **banor** (eller trajektorior), kurvorna $(x(t), y(t))$, inritade. Ger förståelse för systemets beteende.
Mer nästa gång, också fallet då $\mathbf{A}$ har ”för få” egenvektorer.